平面結晶群のセル解析と行列表現

澤田彩花　（津山工業高等専門学校情報工学科４年）

１．はじめに（研究の動機）

平面結晶群Γは，文様群や壁紙群とも呼ばれ，２つの方向に周期性をもつ連続模様のことである．より正確に言えば，Γはユークリッド平面$\boldsymbol{E}^2$の合同変換群$\mathrm{Isom}(\boldsymbol{E}^2)$の離散部分群であり，かつ，$\boldsymbol{E}^2$の平行移動全体のなす群$T$との共通部分$\Gamma \cap T$が$\boldsymbol{Z}^2$と同型になるものである．

平面結晶群Γは１７種類に分類されることが分かっている．スペインのアルファンブラ宮殿に１７種類すべての連続模様があることは興味深く，日本の伝統的な連続模様にも１７種類はすべて見出されているといわれている．つまり，１７種類の平面結晶群は，ある意味で直感的ではある．しかし，インターネットの平面結晶群に関する解説[Wiki]やいくつかの本（[K],[M],[D]）を読んでも，平面結晶群による分類表とそれに対応する図が，いまひとつ自分にとって明確ではなかった．しかも，空間の結晶群，あるいはそれ以上の次元の結晶群を，図を用いて考えることは非常に無理があるように思えた．[Kg]はフリーズパターンというものであったが，これは数字でそのパターンを表現されたものであり，これをきっかけに平面結晶群Γも数で表現すれば理解しやすいのではないかと考えた．このような理由から，本研究では，平面結晶群Γの１７種類の構造を，エクセルを用いて解析し，それを行列で表現することを試みた．つまり，セルによる解析で，平面結晶群Γをはっきりと理解したいと考えた．また，もし１７種類の連続模様を，それぞれ機織り機で織ると考えたとき，縦糸をどのように配置すればよいかという問題をイメージした．別な言い方をすれば，１７種類の連続模様を，回転を一切考えないで，下の段から，上の段に向かって自動的に組み上げるための**型紙を決定せよ**，という問題を考えたのである．そしてこの考えは高次元の結晶群を理解する上でも有効な方法ではないかと思っている．

２．１７種類の平面結晶群のリスト（これまでにわかっていること）

平面結晶群Γの１７種類の名称はICU（International Union of Crystallography）による記法が広く用いられているので，本研究でもそれを用いる．記法で用いられているアルファベット（$\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{m}, \mathbf{g}$）は，以下の頭文字である．

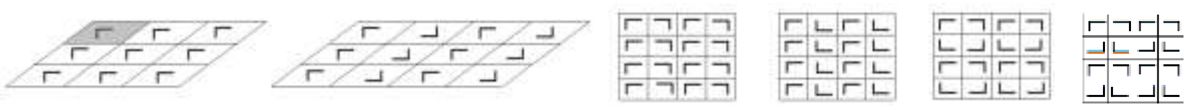
p: primitive　　**c**: centered　　**m**: mirror　　**g**: glide reflection

そして，記法で用いられる数字は，回転の位数を表す．

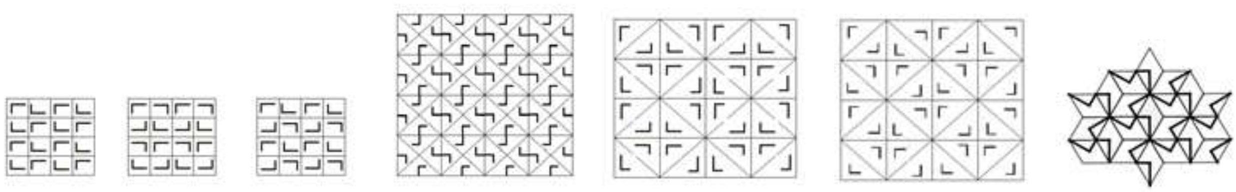
平面結晶群Γは，$\boldsymbol{b_1}$と$\boldsymbol{b_2}$の２方向の平行移動で生成される格子群

$$\Gamma_{\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2}} = \langle x + \boldsymbol{b_1}, x + \boldsymbol{b_2} \rangle$$

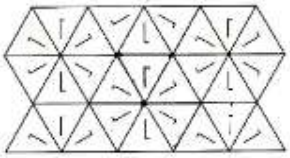
を正規部分群にもち，$\Gamma_{\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2}}$の基本領域の型で１７種類の分類がなされている（ただし，基本領域の取り方は一通りには決まらない）． 以下に，１７種類の分類の図とリストを挙げる．下図は[K]のp.61の図を主に参考にしたものである．



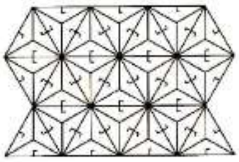
p1　**p2**　**pm**　**pg**　**pmm**　**pmg**



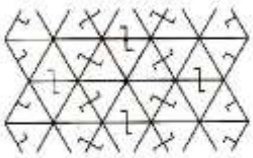
cm　**cmm**　**pgg**　**p4**　**p4m**　**p4g**　**p3**



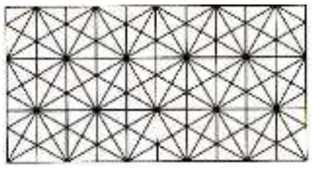
p3m1



p31m



p6



p6m

表１（平面結晶群の特徴）

	格子の型	特　徴
1	**p1** 斜交格子	２方向の平行移動のみ.
2	**p2** 斜交格子	位数 2 の回転で，鏡映と並進鏡映はない.
3	**pm** 長方格子	平行な鏡映の軸をもち，回転はない.
4	**pg** 長方格子	平行な並進鏡映の軸をもち，鏡映と回転はない.
5	**pmm** 長方格子	２方向の直交する鏡映の軸をもち，鏡映と回転はない.
6	**pmg** 長方格子	位数 2 の回転と，平行な鏡映の軸と，鏡映の軸に直交する並進鏡映の軸をもつ.
7	**pgg** 長方格子	位数 2 の回転と，２方向の直交する並進鏡映の軸をもつ.
8	**cm** 菱形格子	平行な鏡映の軸と，鏡映の軸の中間に平行な並進鏡映の軸をもち，回転はない.
9	**cmm** 菱形格子	２方向の直交する鏡映の軸をもち，位数 2 の回転がある.
10	**p4** 正方格子	位数 2 と位数 4 の回転をもち，鏡映と並進鏡映はない.
11	**p4m** 正方格子	位数 2 と位数 4 の回転，さらに 3 方向の鏡映の軸，３方向の直交する並進鏡映の軸をもつ.
12	**p4g** 正方格子	位数 2 と位数 4 の回転，さらに 3 方向の鏡映の軸，２方向の直交する並進鏡映の軸をもつ.
13	**p3** 六角格子	位数 3 の回転をもち，鏡映と並進鏡映はない.
14	**p3m1** 六角格子	位数 3 の回転，３方向の鏡映の軸，３方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心はすべて鏡映の軸上にある.
15	**p31m** 六角格子	位数 3 の回転，３方向の鏡映の軸，３方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心として鏡映の軸上にないものがある.
16	**p6** 六角格子	位数 2，3，6 の回転をもち，鏡映と並進鏡映はない.
17	**p6m** 六角格子	２方向と３方向と６方向の鏡映の軸をもち，回転と並進鏡映はない.

３．平面結晶群を表現する基本的な行列

次の節から平面結晶群雄セル解析を示すが，本研究において平面結晶群を表現する基本的な行列があることがわかった．それは，**p**(primitive)の意味を込めた

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，Pから文様群の記法　**m**（mirror），**g**（glide reflection）とπ回転に対応させた次の行列を定義した.

$$^{\pi}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \ ^{m}P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ ^{g}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

さらに，Pの成分の 1 と 0 を入れ替えた$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$を定義した.

命題１．上に挙げた5個の2次正方行列は以下の性質をもつ．

(1) ${}^{\pi}({}^{\pi}P) = {}^{m}({}^{m}P) = {}^{g}({}^{g}P) = \overline{(\bar{P})} = P$

(2) ${}^{m}({}^{\pi}P) = {}^{\pi}({}^{m}P) = {}^{g}P,\quad {}^{g}({}^{\pi}P) = {}^{\pi}({}^{g}P) = {}^{m}P,\quad {}^{g}({}^{m}P) = {}^{m}({}^{g}P) = {}^{\pi}P$

(3) $\overline{({}^{\pi}P)} = {}^{\pi}(\bar{P}),\ \overline{({}^{m}P)} = {}^{m}(\bar{P}),\ \overline{({}^{g}P)} = {}^{g}(\bar{P})$

（証明）簡単な計算で示される．Q.E.D.

また，

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{m}P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{m}P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad {}^{g}P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad {}^{\pi}P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

なども定義した．

命題２．上に挙げた6個の正方行列は以下の性質をもつ．

(1) ${}^{m}({}^{m}P_3) = P_3,\quad {}^{g}({}^{g}P_4) = {}^{m}({}^{m}P_4) = {}^{m}({}^{m}P_4) = P_4$

(2) ${}^{m}({}^{\pi}P_4) = {}^{\pi}({}^{m}P_4) = {}^{g}P_4,\quad {}^{g}({}^{\pi}P_4) = {}^{\pi}({}^{g}P_4) = {}^{m}P_4,\quad {}^{g}({}^{m}P_4) = {}^{m}({}^{g}P_4) = {}^{\pi}P_4$

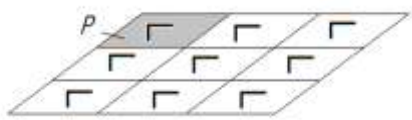
（証明）簡単な計算で示される．Q.E.D.

（**注意**）命題2は，一般の正方行列でも成り立つ．

４．平面結晶群のセルによる解析

４－１．p1のセル解析

これは斜交格子ではあるが，長方形格子とみて$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$に対応したセルに着目し，これを**基本領域**とし，さらにPを水平方向に平行移動を繰り返して得られた**水平基本領域**Hを考える．



1	1
1	0

基本領域P

1	1	1	1	1	1	1	1	…
1	0	1	0	1	0	1	0	…

水平基本領域H

Hにおいて，Pは水平方向への繰り返しの単位的（**水平単位**と呼ぶことにする）なものととれる．また，水平基本領域Hによって，平面結晶群**p1**は，Hを左方向へコピーし，さらに垂直方向に平行移動を繰り返すことで得られる．したがって，本研究で行うセル解析においては，水平基本領域Hがどのような構造であるかを研究すればよい．本研究では，Hの繰り返しの単位的なものに対応する行列を，Hの**基礎行列**H_1と呼ぶことにし，これを研究する．以下，水平単位も同じ記号H_1で表す．

命題３．**p1**のHの基礎行列H_1は，Pとできる．

以下，残りの16種類の平面結晶群の水平基本領域Hの基礎行列を調べていくが，それはなるべくシンプルなものを扱うことにする．

４－２．p2 のセル解析

この場合も斜交格子ではあるが，長方形格子とみてもよい．さらに平面結晶群**p2**の特徴（位数 2 の回転で，鏡映と並進鏡映はない）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．

1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	⋯
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	⋯

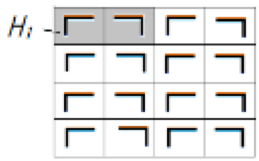
このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であるため．Hの基礎行列H_1は， 2 節で定義した行列を用いることで，

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [P \quad {}^{\pi}P]$$

となる．よって，以下を得る．

命題４．p2のHの基礎行列H_1は，$[P \quad {}^{\pi}P]$ とできる．

４－３．pm のセル解析



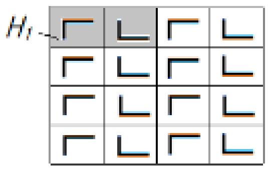
平面結晶群**pm**の特徴（平行な鏡映の軸をもち，回転はない）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題５．pmのHの基礎行列H_1は，$[P \quad {}^{m}P]$とできる．

４－４．pg のセル解析



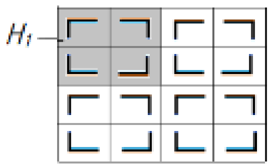
平面結晶群**pg**の特徴（２方向の直交する鏡映の軸をもち，鏡映と回転はない)を考慮すると, 水平基本領域Hは以下のようにとることができる．

1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	⋯
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	⋯

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題６．pgのHの基礎行列は，$\left[P \quad {}^{g}P\right]$とできる．

４－５．pmm のセル解析



平面結晶群**pmm**の特徴（平行な並進鏡映の軸をもち，鏡映と回転はない）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．

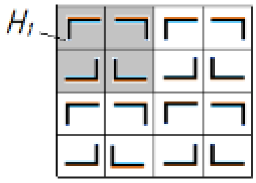
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	⋯
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題７．pmmのHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} P & {}^{m}P \\ {}^{g}P & {}^{\pi}P \end{bmatrix}$とできる．

４－６．pmg のセル解析

平面結晶群**pmg**の特徴（位数 2 の回転と，平行な鏡映の軸と，鏡映の軸に直交する並進鏡映の軸をもつ）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．



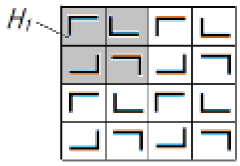
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	…
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題８．pmgのHの基礎行列は，$\begin{bmatrix} P & {}^{m}P \\ {}^{\pi}P & {}^{g}P \end{bmatrix}$とできる．

４－７．pgg のセル解析

平面結晶群**pgg**の特徴（位数 2 の回転と，２方向の直交する並進鏡映の軸をもつ）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができ，水平単位H_1は太枠で囲んだ領域である．



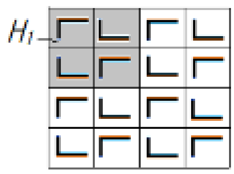
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	…
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	…
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	…
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	…

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題９．pggのHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} P & {}^{g}P \\ {}^{\pi}P & {}^{m}P \end{bmatrix}$とできる．

４－８．cm のセル解析

平面結晶群**cm**の特徴（平行な鏡映の軸と，鏡映の軸の中間に平行な並進鏡映の軸をもち，回転はない）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができ，水平単位H_1は太枠で囲んだ領域である．



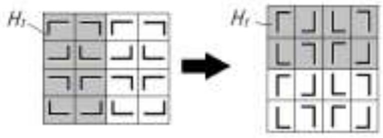
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	…
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	…
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	…
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	…

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題１０．cmのHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} P & {}^{g}P \\ {}^{g}P & P \end{bmatrix}$とできる．

４－９．cmm のセル解析

平面結晶群**cmm**の特徴（２方向の直交する鏡映の軸をもち，位数 2 の回転がある）を考慮すると，図の水平方向と鉛直方向を入れ替えて，水平基本領域Hは以下のようにとることができ，水平単位H_1は太枠で囲んだ領域である．



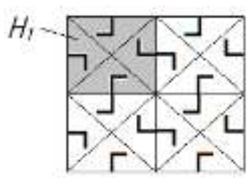
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	…
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	…
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	…
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	…

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題１１．cmmのHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} P & {}^{\pi}P & {}^{g}P & {}^{m}P \\ {}^{g}P & {}^{m}P & P & {}^{\pi}P \end{bmatrix}$とできる．

４－１０．p4 のセル解析

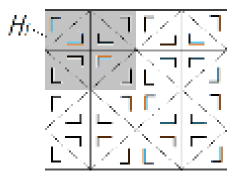
平面結晶群**p4**の特徴（位数２と位数４の回転，さらに３方向の鏡映の軸，２方向の直交する並進鏡映の軸をもつ）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．



0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	…
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	…
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	…
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	…
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	…
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	…

このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，以下を得る．

命題１２．p4のHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} O & {}^{\pi}P & O \\ {}^{m}P & O & {}^{g}P \\ O & P & O \end{bmatrix}$とできる．



４－１１．p4m のセル解析

p4mの特徴（位数２と位数４の回転，さらに３方向の鏡映の軸，３方向の直交する並進鏡映の軸をもつ）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．

1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	…
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	…
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	…
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	…
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	…
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	…

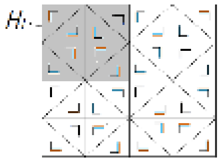
このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{m}P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を用いて，以下を得る．

命題１３．p4mのHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} P_3 & {}^{m}P_3 \\ {}^{m}P_3 & P_3 \end{bmatrix}$とできる．

４－１２．p4g のセル解析



p4gの特徴（位数２と位数４の回転，さらに３方向の鏡映の軸，２方向の直交する並進鏡映の軸をもつ）を考慮すると，水平基本領域Hは以下のようにとることができる．

1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	…
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	…
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	…
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	…
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	…
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	…
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	

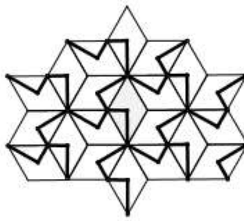
このとき，水平単位は太枠で囲んだ領域であり，

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{m}P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad {}^{g}P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad {}^{\pi}P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

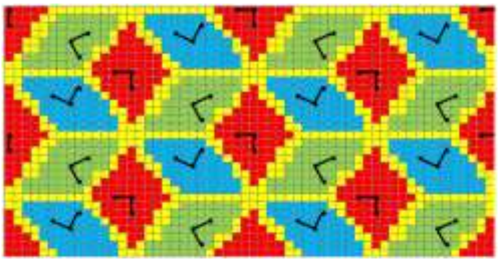
を用いて，以下を得る．

命題１４．p4gのHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} P_4 & {}^{g}P_4 \\ {}^{m}P_4 & {}^{\pi}P_4 \end{bmatrix}$とできる．

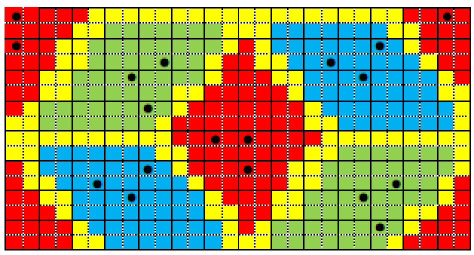
４－１３．p3 のセル解析



p3の特徴（位数３の回転をもち，鏡映と並進鏡映はない）から，これをセルで正確に表すことはできない．したがって，近似的な表現になる．水平基本単位H_1は以下の図のようにした．



p3



Hの水平単位H_1

上の図の●を１として，Hの基礎行列H_1を作ると，16×28行列で

$$H_1 = \begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix}$$

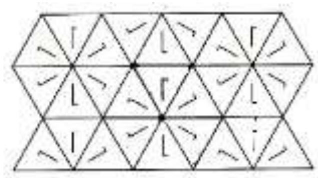
ここで，

$$C=\begin{bmatrix} {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & \bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} \\ 0 & 0 & \bar{P} & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

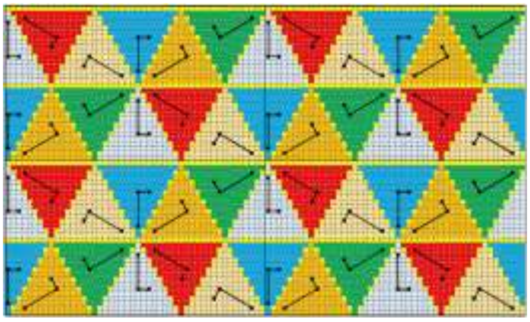
である．

命題１５．p3の近似的なHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix}$とできる．

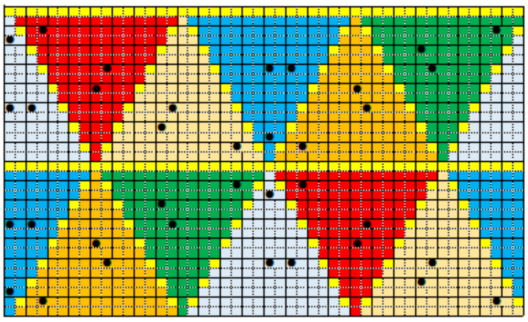
１４．p3m1 セル解析



p3m1の特徴（位数３の回転，３方向の鏡映の軸，３方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心はすべて鏡映の軸上にある）も，セルで正確に表すことはできず，やはり，近似的な表現になる．水平単位H_1は以下の図のようにした．



p3m1



Hの水平単位H_1

上の図の●を１として，Hの基礎行列H_1を作ると，32×48行列で，

$$H_1=\begin{bmatrix} R & S \\ S & R \end{bmatrix}$$

ここで，

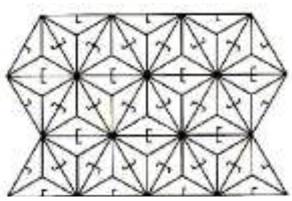
$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{m}\bar{P} & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{\pi}\bar{P} & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 \end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{\pi}\bar{P} & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{m}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

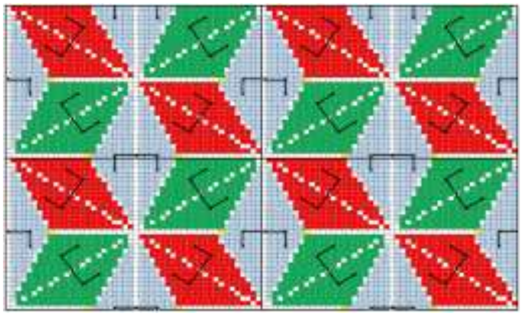
である．

命題１６．p3m1の近似的なHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} R & S \\ S & R \end{bmatrix}$とできる．

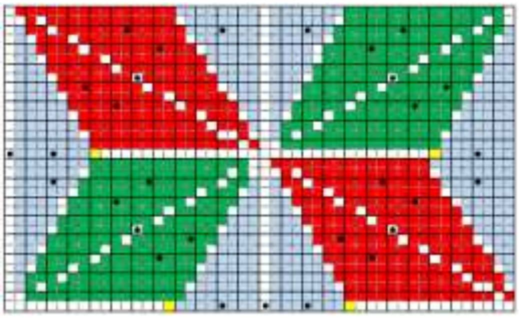
１５．p31m セル解析

　p31mの特徴（位数３の回転，３方向の鏡映の軸，３方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心として鏡映の軸上にないものがある）も，セルで正確に表すことはできず，やはり，近似的な表現になる．水平基本領域Hは以下の図のようにした．





p3m1



Hの水平単位H_1

上の図の●を１として，Hの基礎行列H_1を作ると，32×48行列で，

$$H_1 = \begin{bmatrix} T & U \\ U & T \end{bmatrix}$$

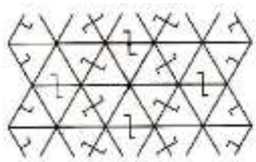
ここで

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{m}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{m}\bar{P} & 0 & {}^{m}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{m}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{g}\bar{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\pi}\bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{m}\bar{P} & 0 \end{bmatrix}$$

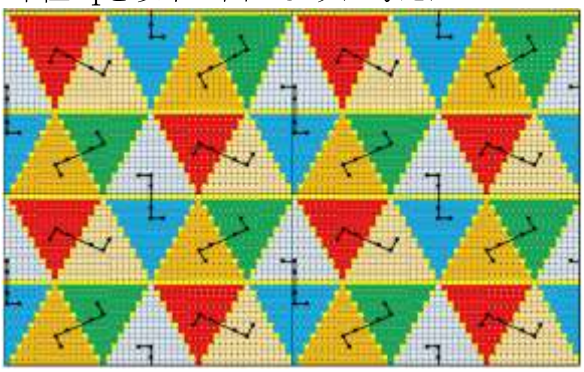
である．

命題１７．p31mの近似的なHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} T & U \\ U & T \end{bmatrix}$とできる．

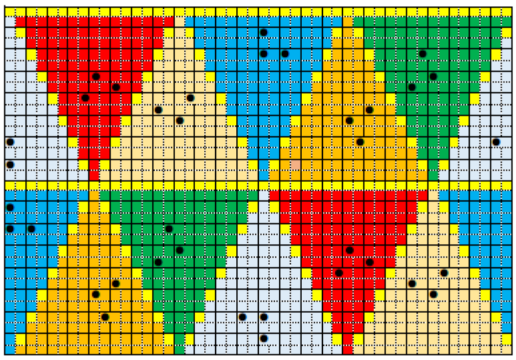
１６．p6 のセル解析



　p6の特徴（位数２，３，６の回転をもち，鏡映と並進鏡映はない）についても，セルで表すことは正確さに欠ける．やはり，近似的な表現として水平基本単位H_1を以下の図のように考えた．



p6



Hの水平単位H_1

上の図の●を１として，Hの基礎行列H_1を作ると，32×48行列で，

$$H_1 = \begin{bmatrix} V & W \\ W & V \end{bmatrix}$$

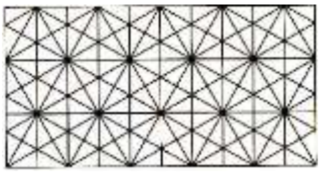
ここで,

$$V = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&{}^{\pi}\bar{P}&{}^{m}\bar{P}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&{}^{g}\bar{P}&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&{}^{g}\bar{P}&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&{}^{\pi}\bar{P}&0&0&0 \\ {}^{\pi}\bar{P}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ {}^{\pi}\bar{P}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ {}^{\pi}\bar{P}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ {}^{\pi}\bar{P}&{}^{\pi}\bar{P}&0&0&0&0&0&{}^{g}\bar{P}&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&{}^{\pi}\bar{P}&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&{}^{\pi}\bar{P}&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&{}^{g}\bar{P}&0&0&0&0&0&0&{}^{\pi}\bar{P} \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

である.

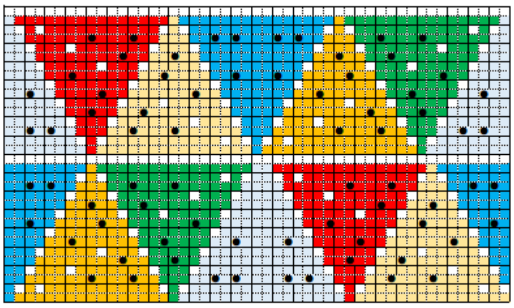
命題１８．p6の近似的なHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} V & W \\ W & V \end{bmatrix}$とできる.

１７．p6m のセル解析



p6mの特徴（２方向と３方向と６方向の鏡映の軸をもち，回転と並進鏡映はない）についても，セルで表すことは正確さに欠ける．やはり，近似的な表現として水平単位H_1を以下の図のように考えた.

p6m



Hの水平単位H_1

上の図の●を１として，Hの基礎行列H_1を作ると，32×48行列で

$$H_1 = \begin{bmatrix} X & {}_{m}X \\ {}_{m}X & X \end{bmatrix}$$

ここで,

$$X = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&{}^{m}\bar{P}&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&{}^{m}\bar{P} \\ 0&0&0&0&0&\bar{P}&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&0&0 \\ 0&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&0&0&\bar{P}&0&0&0&{}^{m}\bar{P} \\ 0&{}^{m}\bar{P}&0&0&\bar{P}&0&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&0 \\ 0&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&\bar{P}&0&0&0&0&0 \\ 0&{}^{m}\bar{P}&{}^{m}\bar{P}&0&0&0&{}^{m}\bar{P}&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

であり，${}_{m}X$ は，Xを２次の小行列で構成された8×12次行列とみたとき，i行を$9-i$行に入れ替えたもので，Xの第８行目下に水平線を入れ，それを軸にXの各行を対称移動させたものである.

命題１９．p6mの近似的なHの基礎行列H_1は，$\begin{bmatrix} X & {}_{m}X \\ {}_{m}X & X \end{bmatrix}$とできる.

５．研究結果と考察

研究結果を以下の表にまとめる．

表２（Hの基礎行列H_1）

	タイプ	Hの基礎行列H_1	H_1のサイズ		タイプ	Hの基礎行列H_1	H_1のサイズ
1	**p1**	P	4×4	10	**p4**	$\begin{bmatrix} O & {}^{\pi}P & O \\ {}^{m}P & O & {}^{g}P \\ O & P & O \end{bmatrix}$	6×6
2	**p2**	$[P \quad {}^{\pi}P]$	4×4	11	**p4m**	$\begin{bmatrix} P_3 & {}^{m}P_3 \\ {}^{m}P_3 & P_3 \end{bmatrix}$	6×6
3	**pm**	$[P \quad {}^{m}P]$	4×4	12	**p4g**	$\begin{bmatrix} P_4 & {}^{g}P_4 \\ {}^{m}P_4 & {}^{\pi}P_4 \end{bmatrix}$	8×8
4	**pg**	$[P \quad {}^{g}P]$	4×4	13	**p3**	$\begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix}$ ＊	16×28
5	**pmm**	$\begin{bmatrix} P & {}^{m}P \\ {}^{g}P & {}^{\pi}P \end{bmatrix}$	4×4	14	**p3m1**	$\begin{bmatrix} R & S \\ S & R \end{bmatrix}$ ＊	32×48
6	**pmg**	$\begin{bmatrix} P & {}^{m}P \\ {}^{\pi}P & {}^{g}P \end{bmatrix}$	4×4	15	**p31m**	$\begin{bmatrix} T & U \\ U & T \end{bmatrix}$ ＊	32×48
7	**pgg**	$\begin{bmatrix} P & {}^{g}P \\ {}^{\pi}P & {}^{m}P \end{bmatrix}$	4×4	16	**p6**	$\begin{bmatrix} V & W \\ W & V \end{bmatrix}$ ＊	32×48
8	**cm**	$\begin{bmatrix} P & {}^{g}P \\ {}^{g}P & P \end{bmatrix}$	4×4	17	**p6m**	$\begin{bmatrix} X & {}_{m}X \\ {}_{m}X & X \end{bmatrix}$ ＊	32×48
9	**cmm**	$\begin{bmatrix} P & {}^{\pi}P & {}^{g}P & {}^{m}P \\ {}^{g}P & {}^{m}P & P & {}^{\pi}P \end{bmatrix}$	4×8				

＊は近似的な行列表現

本研究の目的は，セルによる解析で，平面結晶群Γを理解することであり，１７種類の連続模様を，回転を一切考えないで，下の段から，上の段に向かって自動的に組み上げるための型紙を決定することであった．研究で得られた上の表から，まず当然のことではあるが，Hの基礎行列自体がある種の対称性をもっている点が挙げられ，行列に用いた記号とタイプの表記が対応できる形になっている点は成功したといえる．

Hの基礎行列H_1は型紙の基本単位の役割ととらえて作ったものであったが，基礎行列で回転がどれほど表現できるかが，研究当初は不安であった．しかも当然ではあるが，13 から 17 番目のタイプには，回転の位数が 3，6 が含まれていたり，基本領域が三角形であるため，これらの基礎行列は近似的なものとなった．それでも，１７個の基礎行列H_1をみると，回転が含まれるタイプにはすべて要素${}^{\pi}P$が含まれており，反対に回転が含まれないタイプには要素${}^{\pi}P$は全く含まれていない．つまり，Hの基礎行列H_1を見ただけで，回転の要素があるか否かがわかる表現が構成できたといえる．

さて，P_1, P_2をm次正方行列としたとき

$${}^{\pi}[P_1, P_2] = [{}^{\pi}P_1, {}^{\pi}P_2], \quad {}^{m}[P_1, P_2] = [{}^{\pi}P_1, {}^{\pi}P_2], \quad {}^{g}[P_1, P_2] = [{}^{\pi}P_1, {}^{\pi}P_2]$$

と定義する．そしてこれらをそれぞれ，$[P_1, P_2]$の**m次小行列へのπ作用**，**m作用**，**g作用**と呼ぶことにする．さらに，行列Aがいくつかのm次正方行列に分割されているときも，同様に，Aのm次小行列へのπ作用，m作用，g作用を定義する．これらの定義から，Hのm次小行列へのπ作用，m作用，g作用を計算できることが可能になった．以下が成り立つことは簡単な計算から証明できる．

系１．表２の１から 10 までのタイプについて，Hの基礎行列H_1の2次小行列へのπ作用，m作用，g作用はまた，同じタイプのHの基礎行列となる．

系２．表２の**p4m**について，Hの基礎行列H_1の3次小行列へのπ作用，m作用，g作用はまた，**p4m**のHの基礎行列となる．

系３．表２の**p4g**について，Hの基礎行列H_1の4次小行列へのπ作用，m作用，g作用はまた，**p4g**のHの基礎行列となる．

６．今後に向けて

自分としては，Hの基礎行列H_1を用いることで，１７種類の平面結晶群の構造が，図だけで理解するよりも，より深く理解できたと思っている．そして，基礎行列のアイディアを改良して３次元の結晶群の理解に繋げたいと考えている．もし，基礎行列のアイディアが一般化できれば，n次元結晶群なるものの研究に繋げられるのではないかとも考えている．

参考文献

[K] 河野俊丈，結晶群，共立出版, 2015

[M] P.J.Morandi, The Classification of Wallpaper Patterns: From Group Cohomology to Escher's Tessellations, New Mexico State University, http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/Wallpaper.pdf

[Kg] 黒木玄，フリーズパターン－数の繰返し模様の不思議, http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf，2013

[D] 堂脇寛子，敷き詰め模様の分類　－平面運動からの考察－，兵庫教育大学大学院 学校教育研究科，教科・領域教育学専攻自 然 系 コ ー ス，平成 19 年度学位論文

[Wiki] ウィキペディア，文様群, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%96%87%E6%A7%98%E7%BE%A4