

複素ピタゴラス数の構造について

橘 智子 (津山高専,情報工学科 3 年)

1. はじめに

私は昨年度「虚数の整数の研究—偶奇性を使った魅力的応用の創造—」(JSEC2011)において複素ピタゴラス数の研究を始めた. その研究を始めるきっかけとなったのは, 魅力的な行列との出会いである. その行列は小林(2008)[Ko]の本に示されていたピタゴラス変換行列

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

である. このピタゴラス変換行列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ というただ一つのピタゴラス数からすべてのピタゴラス数を生

み出すことができる行列である. この行列 P が発見されたのは 50 年位前であると言われている([Pt]参照). 私はこの行列 P に魅力を感じ, ピタゴラス数の世界にとっても興味を持った.

昨年度の研究では, 自分の知識不足から自然数でのピタゴラス数変換行列 P を用いて複素ピタゴラス数の構造を研究した. しかし, 行列 P は自然数の世界を扱うものであったために複素ピタゴラス数の構造を解明するに至ることができなかった.

今年度の研究では, 複素数の勉強をやりなおし, 複素ピタゴラス数の構造を解明するために自然数でのピタゴラス数変換行列 P に代わる複素ピタゴラス数のための変換行列を研究し, そこから新たに複素ピタゴラス数の構造研究を行おうと考えた. そして, 昨年度とは全く異なる研究に着手することができた.

2. 今年度の研究結果の概要

今年度の私の第一の研究は, 自然数における行列 P に対応する複素ピタゴラス数変換行列 G (generated matrix)を複素ピタゴラス数のパラメータからつくることであった. 複素ピタゴラス数のパラメータについては J.T.Cross(1986)の論文[Cr]に示されていた. この論文から既約な複素ピタゴラス数のパラメータが分かった. この結果を利用して, 複素ピタゴラス数の変換行列

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

を発見することができた.

第二の研究は, 行列 G を用いて自然数における $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対応する複素ピタゴラス数, origin の存在研究

である.

行列 G は行列 P とは少しだけ違いがあるが, 自然数においても $\text{origin} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から全ての自然数のピ

タゴラス数を生み出すことができる.

多くの数値計算を行った結果, 複素ピタゴラス数の origin は自然数のようにただ一つではなかった. 複素ピタゴラス数では origin が多数存在していたのである. この事実から, 複素ピタゴラス数の構造について新たな疑問が生じた. それは, 複素ピタゴラス数の origin 達の特徴はどのようなもので, 複素ピタゴラス数はどこからどのように生まれ, 増えてゆくのか?そしてどのような生態系をしているのか?という疑問である. これらの疑問について研究してみようと思った.

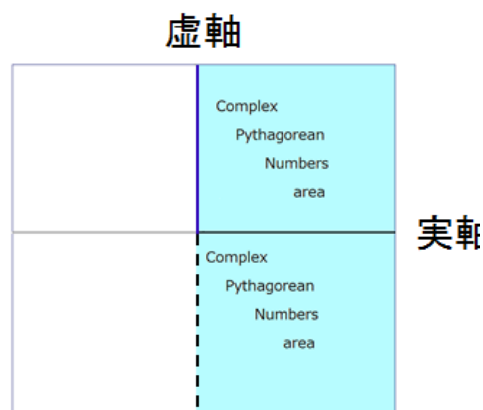
研究の結果, $\text{relatively origins}$ という対と $\text{relatively origins}$ を特徴づける index と gene という量を発見した. この index と gene の発見が今年度の研究の最大の成果と考えている. これらについては 5 節以降で詳細に扱う.

3. 複素ピタゴラス数と研究領域について

複素ピタゴラス数とは, 複素数 a, b, c で

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ を満たす } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ のことである.}$$

複素ピタゴラス数の研究領域は, 数の対称性から, 第一象限と第四象限と虚軸の正の部分を含むものとする (図 1 参照).



(図 1)

4. 自然数のピタゴラス数に関する既知の結果

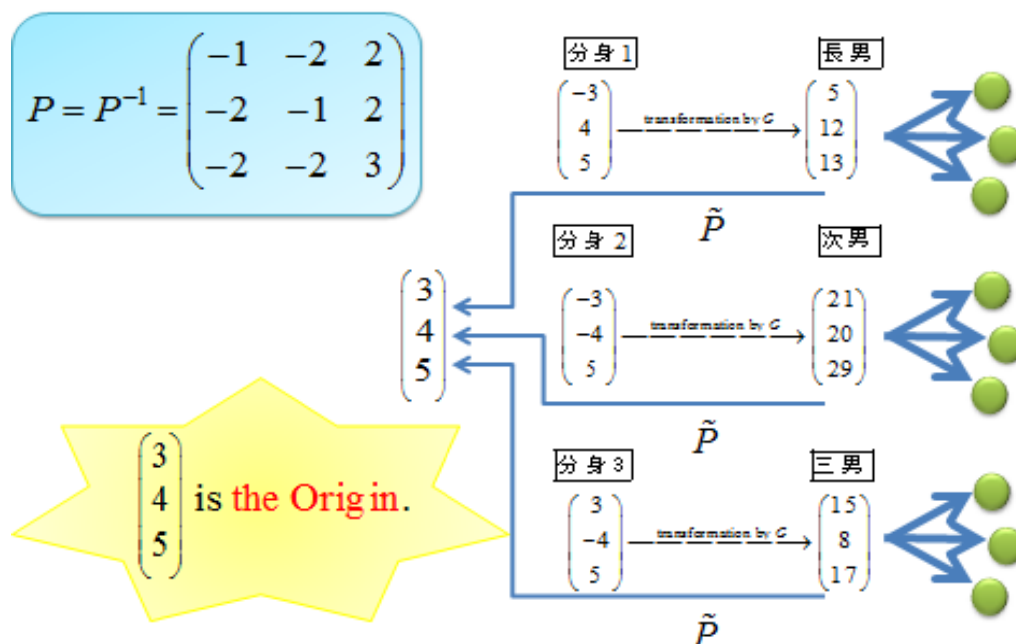
全てのピタゴラス数は行列 P によって $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から生み出されることが知られている (図 2 参照).

最初に $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から 3 つの分身 $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ をつくる. その分身をピタゴラス変換行列 P で変

換すると長男 $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$, 次男 $\begin{pmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}$, 三男 $\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ という 3 つのピタゴラス数が生まれる. また, 行列 P は逆

行列も同じ P であるため、どんなピタゴラス数でも行列 $P (= P^{-1})$ でくりかえし変換することによって、

最終的に $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ というピタゴラス数にたどりつく。私はピタゴラス数 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ を自然数の世界での origin と呼ぶことにした。



(図 2)

5. 複素ピタゴラス変換行列 G について

複素ピタゴラス数の変換行列はパラメータからつくることができる。パラメータは J.T.Cross(1986)の論文[Cr]に示されていた。

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を既約な複素ピタゴラス数とすると、 a, b, c はそれぞれパラメータ v, w により、

$$a = \frac{(v^2 + w^2)}{2}, \quad b = \frac{(v^2 - w^2)}{2i}, \quad c = vw$$

と表される。ただし、 v と w は両方とも奇数かつ互いに素である。ここで、複素数 z が偶数であるとは z が $(1+i)$ の倍数であるときのことであり、奇数であるとは $(1+i)$ の倍数以外の数のことである。

以下に、変換行列 G の構成法の概略を示す。

(ステップ 1)

$$a = \frac{v^2 + w^2}{2}, \quad b = \frac{v^2 - w^2}{2i}, \quad c = vw$$

とおく。このとき、 $m = \frac{v+w}{2}$, $n = \frac{v-w}{2i}$ は自然数となる。

(ステップ 2) ここで自然数で用いられたパラメータ変換を利用する.

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

(ステップ 3) これを複素ピタゴラス数のパラメータに置き換えると以下の変換が得られる.

$$\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

(ステップ 4) $G = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ とおき, さらに

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とする. ここでの $\tilde{G}$ とは G での変換後, さらに出てきた各成分の実数成分を正にする操作を表す.

(ステップ 5) a', b', c' をステップ 3 を使い v, w で表し, さらにステップ 4 を計算することで, 以下の行列が得られる.

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(構成終)

複素ピタゴラス数の変換行列 G は自然数のピタゴラス数変換行列 P と比較すると, 2 列目の符号が変わっただけのものになっている. 行列 P は $P^{-1} = P$ であったが, 行列 G は $G^{-1} \neq G$ であり G^{-1} は

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

である.

6. Relatively origins について

複素ピタゴラス数の変換行列 G を用いた研究の結果, どんな複素ピタゴラス数も操作 $\tilde{G}$ を繰り返す

ことで, 最終的にある複素ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ にたどりつくことがわかった. このとき, (1) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

となるか、(2) $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ であつ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ という 2 つのケースに分かれる。

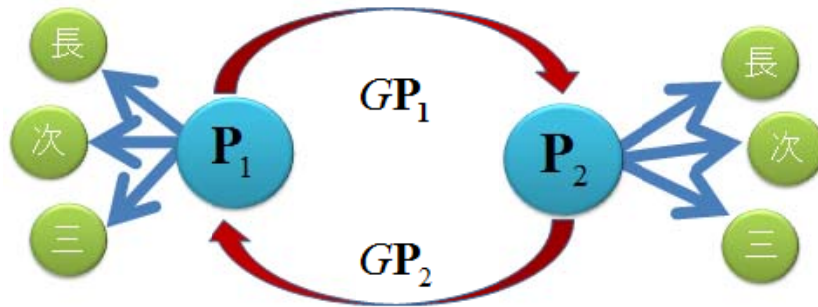
私は、(1)と(2)のような $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ をオリジン (origin), 特に(2)の $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ を相対的オリジン (relatively

origins) と呼ぶことにした。すなわち、複素ピタゴラス数には自然数とは異なる relatively origins が存在することを発見した。

(Relatively origins の説明と図)

Relatively origins とは 2 つの origin が変換行列 G でたがいに移りあうものである。

P_1 と P_2 は両方 origin である。 P_1 を行列 G で変換すると P_2 となり、 P_2 を行列 G で変換すると P_1 になる (図 3 参照)。



(図 3)

Relatively origins でない origin については、実軸上の $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ と、虚軸上の $\begin{pmatrix} 4i \\ 3i \\ 5i \end{pmatrix}$ だけであった。

さらに、relatively origins を高速に見つけるための定理を証明した。

定理 1 (Relatively origins の必要条件)

$\begin{pmatrix} \alpha_r + \alpha_i i \\ \beta_r + \beta_i i \\ \gamma_r + \gamma_i i \end{pmatrix}$ を複素ピタゴラス数とする。このとき $\alpha_j + 2\beta_j - 2\gamma_j > 0, 2\alpha_j + \beta_j - 2\gamma_j > 0,$

$2\alpha_j + 2\beta_j - 3\gamma_j > 0$ ならば、 $\begin{pmatrix} \alpha_r + \alpha_i i \\ \beta_r + \beta_i i \\ \gamma_r + \gamma_i i \end{pmatrix}$ は relatively origins の一つである。

以前は、複素ピタゴラス数を行列 G で繰り返し変換することで relatively origins を見つけていたが、定理 1 によってパラメータから直接 relatively origins を高速に発見することが可能になった。

7. Index について

Relatively origins を発見してから, relatively origins にはなにか特有の特徴があるのではないかと思います, いろいろ試行錯誤しているうちに驚くべき現象を発見した. それは relatively origins の各成分どうしを足し合せた値がすべて等しくなるということである. そして以下の定理 2 を証明することができた.

定理 2

複素ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ について $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ が relatively origins である必要十分条件は 2 つ

の複素ピタゴラス数のベクトル和の各成分がすべて等しいことである.

ここで relative origins の各成分どうしを足して得られた唯一つの値を index と呼ぶことにした. たとえば, 2 つの複素ピタゴラス数

$$\begin{pmatrix} 12+24i \\ 16+3i \\ 16+21i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12-12i \\ 8+9i \\ 8-9i \end{pmatrix}$$

を考える. これらは relatively origins である. これらの複素ピタゴラス数をベクトルと考えて足し合わせる.

$$\begin{pmatrix} 12+24i \\ 16+3i \\ 16+21i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12-12i \\ 8+9i \\ 8-9i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+12i \\ 24+12i \\ 24+12i \end{pmatrix}$$

そうすると, どの成分の値もすべて同じになる. この値 $24+12i$ が relatively origins の index である.

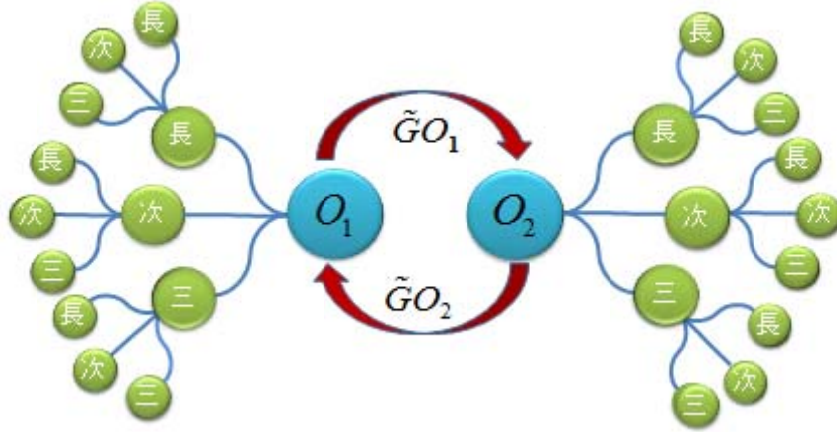
Relatively origins $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ について, それらの家系図は 1 対 1 に対応する. Relatively origins の

家系の構造は図 4 のようなイメージである(図 4 参照). すなわち $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ の子孫 $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ に対して, $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ の子

孫 $\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ が存在する. さらに relatively origins には index が存在したので, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ の値には意味

があると考えられる. そこで, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ を相対的子孫 (relatively offspring) と呼び, $\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \pm$

$\begin{pmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \\ \gamma'_k \end{pmatrix}$ の値を相対的子孫の和 (relatively offspring sum) と呼ぶことにした.



(図 4)

8. Gene について

Relatively origins の index を $\sigma + \delta i$ とする. このとき, 比 $(\sigma : \delta)$ を **gene** と呼ぶ. ただし, $(\sigma : 0)$ は $(\infty : 0)$ で, $(0 : \delta)$ は $(0 : \infty)$ で表す.

Relatively origins は自然数のピタゴラス数と同様に, それぞれ 3 体の子どもを産む. 本研究では relatively origins の子ども, 孫世代においての複素ピタゴラス数の構造を研究した. 私は, index や gene という量が後の世代に何らかの形で影響を及ぼす, すなわち遺伝していくのではないかと予想している. 以下に調査結果の一例をあげる.

次の relatively origins を考える.

$$\text{origin1} : \begin{pmatrix} 42 + 74i \\ 34 + 357i \\ 42 + 363i \end{pmatrix}, \quad \text{origin2} : \begin{pmatrix} 26 + 62i \\ 34 - 221i \\ 26 - 227i \end{pmatrix}$$

この relatively origins の index は $68 + 136i$ で, gene は $(1 : 2)$ である.

表 1 は origin1 の三兄弟を表したものである.

(表 1)

	α_r	$\alpha_i i$	β_r	$\beta_i i$	γ_r	$\gamma_i i$
origin1	42	74	34	357	42	363
長男	194	1514	202	1231	278	1951
次男	58	86	134	517	142	523
三男	110	1366	34	935	110	1655

表 2 は origin2 の三兄弟を表したものである.

(表 2)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
origin2	26	62	34	-221	26	-227
長男	146	-834	138	-551	198	-999
次男	10	50	70	-109	62	-115
三男	94	-958	34	-799	94	-1247

表 3 は, relatively offspring sum である. たとえば, 長+は origin1 の長男と origin2 の長男を足したものを表し, 長-は origin1 の長男から origin2 の長男を引いたものを表す. (長+)と(次+) と(三+)に特徴がみられる.

(表 3)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
長+	340	680	340	680	476	952
次+	68	136	204	408	204	408
三+	204	408	68	136	204	408
長-	48	2348	64	1782	80	2950
次-	48	36	64	626	80	638
三-	16	2324	0	1734	16	2902

表 4 は表 3 における比 $(\alpha_r:\alpha_i), (\beta_r:\beta_i), (\gamma_r:\gamma_i)$ をそれぞれ計算したものである. この比のことを相対的子孫の比 (relatively offspring ratio) という. 表 4 において, (長+)と(次+) と(三+)はすべての成分で Gene(1:2) を受け継いでいる.

(表 4)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
長+	1	2	1	2	1	2
次+	1	2	1	2	1	2
三+	1	2	1	2	1	2
長-	12	587	32	891	8	295
次-	4	3	32	313	40	319
三-	4	581	0	1	8	1451

以下の表は, さらに孫の世代まで調査した結果である.

表 5 は origin1 と origin2 の長男について, その子どもたち (origin の孫たち) の足し算を行ったものである. たとえば, 長次+とは origin1 と origin2 のそれぞれの長男から生まれた次男同士を足し合わせたものを意味する(以降 relatively offspring sum と呼ぶ).

(表 5)

	α_r	α_i	β_r	β_i	γ_r	γ_i
長長+	1972	3944	1972	3944	2788	5576
長次+	612	1224	1292	2584	1428	2856
長三+	1292	2584	612	1224	1428	2856
長長-	336	11812	320	12378	464	17110
長次-	80	4684	192	8814	208	9982
長三-	240	7116	128	2986	272	7718

表 6 は表 5 の比をまとめたものである (以降 relatively offspring ratio と呼ぶ). ここでも, (長長+)と(長次+) と(長三+)はすべての成分で gene(1:2) を受け継いでいる.

(表 6)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
長長+	1	2	1	2	1	2
長次+	1	2	1	2	1	2
長三+	1	2	1	2	1	2
長長-	84	2953	160	6189	8	295
長次-	20	1171	32	1469	104	4991
長三-	20	593	64	1493	8	227

表 7 は origin1 と origin2 の次男の子どもたちの relatively offspring sum の結果である。

(表 7)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
次長+	884	1768	748	1496	1156	2312
次次+	80	60	340	680	340	680
次三+	748	1496	476	952	884	1768
次長-	336	2564	320	1974	464	3238
次次-	68	136	192	722	208	734
次三-	240	2492	128	1830	272	3094

表 8 は表 7 の relatively offspring ratio をまとめたものである。ここでは、(次長+)と(次三+)がすべての成分で gene(1:2) を受け継いでいる。

(表 8)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
次長+	1	2	1	2	1	2
次次+	4	3	1	2	1	2
次三+	1	2	1	2	1	2
次長-	84	641	160	987	232	1619
次次-	1	2	96	361	104	367
次三-	60	623	64	915	8	91

表 9 は origin1 と origin2 の三男の子どもたちの relatively offspring sum の結果である。

(表 9)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
三長+	748	1496	884	1768	1156	2312
三次+	476	952	748	1496	884	1768
三三+	340	680	68	136	340	680
三長-	48	11596	64	12186	80	16822
三次-	48	4660	64	8718	80	9886
三三-	16	6948	0	2890	16	7526

表 10 は表 9 の relatively offspring ratio をまとめたものである。(三長+)と(三次+) と(三三+)はすべての成分で Gene(1:2) を受け継いでいる。

(表 10)

	α_r	α_i^i	β_r	β_i^i	γ_r	γ_i^i
三長+	1	2	1	2	1	2
三次+	1	2	1	2	1	2
三三+	1	2	1	2	1	2
三長-	12	2899	32	6093	40	8411
三次-	12	1165	32	4359	40	4943
三三-	4	1737	0	1	8	3763

上の例でもわかるように、比 gene は relatively origins の子ども世代に何らかの形で比較的良く遺伝していることがわかる。約 50 ものデータを調査した結果、同様な状況が起こっていた。しかし、孫世代に入ると gene の遺伝性が変化していく傾向があり、その遺伝形態については研究中である。

7. 今後の研究課題

課題(1) 子ども世代において、すべての成分で gene が遺伝している場合をいくつか調査した。その後 6 世代までを追跡調査した結果、すべて gene が遺伝していることがわかった。

Gene はどのような場合に、どの程度の確率で遺伝していくのかを研究したい。

課題(2) 第一世代の relatively offspring sum には index の値で割り切れる成分が存在するのではないかと考えている。現段階の研究では、長男、次男、三男に表れている relatively offspring sum を index でそれぞれ割った値が、長男は $|5|$ 、次男は $|3|$ 、三男は $|3|$ となる成分があることをこれまでのデータから確認している(表 3 参照)。この結果が第一世代の relatively offspring sum すべてにおけることなのか研究することが今後の課題である。

参考文献

[Pt]Pythagorean Triple, <http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>

[Cr]PrimitivePythagoreanTriplesinGaussianintegers,JAMES.T.Cross,MATEMATICS MAGAZINE.V
OL.59,NO.2,1986

[Ko]ピタゴラス数を生み出す行列のはなし、ベレ出版、小林吹代、2008