

平方多角数の研究

津山工業高等専門学校 3年
吉川和希

1

n 番目の平方三角数 (Square triangular number) S_n は

$$S_n = \frac{1}{32} \{ (1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \}^2$$

で、漸化式は、

$$S_n = 34S_{n-1} - S_{n-2} + 2, \quad (S_0 = 0, S_1 = 1)$$

であることがわかっていて。この式は、
1778年にオイラーが発見したものである。しかし、
インターネットで Square triangular number は、検索
できても、Square pentagonal number などは、見つ
からなかった。

本研究では、より一般的に n 番目の平方 k 角数の
一般項について考察する。

3

はじめに

1 年生の数学の組み合わせの授業で

$${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + n$$

という関係を学習し、

$n(n+1)$ の数に興味をもった。

はじめは、その 1 の位の周期性を調べていた。

そして、それを拡張した研究も行っていた。

さらに、

$$1 + 3 + \cdots + (2n+1) = n^2$$

ということにも興味をもち、

$n(n+1)$ と平方数に関する研究を行おうと考えた。

このような研究において、

平方三角数の研究結果があることを見つけた。

2

各セクションの概要

§1 平方多角数とペル方程式の関係

平方三角数の過去の研究を調べたところ、ペル方程式
と関係していることを知った。それによって、一般公式
の平方 P 角数をペル方程式を使うことによって得られると
考え、研究に着手した。

§2 ペル方程式の初期値と連分数

ペル方程式 ($x^2 - qy^2 = \pm 1$) の初期値を求める際に、 q が
大きい値の場合、初期値を求めることが難しい。そこで、
初期値を計算する方法を調べ、それを研究に用いたので、
その内容をまとめる。

4

§3 平方5角数

ここでは、具体的に平方5角数を計算する。§1で説明した理論を用いて平方5角数の計算を進めていく。

§4 一般平方 p 角数の公式

このセクションでは、一般公式を求める。ただし、 t_n と $p-4$ が互いに素という条件が付く。

数列 t_n を平方 p 角数の番号とすると、

$$t_n\{t_n(p-2)-(p-4)\}=2u^2$$

となる。

ここで、 t_n と $t_n(p-2)-(p-4)$ が互いに素なら、以下の(1),(2)を考えればよい。

$$(1) t_n = A_n^2, \quad t_n(p-2)-(p-4) = 2B_n^2$$

$$(2) t_n = 2A_n^2, \quad t_n(p-2)-(p-4) = B_n^2$$

§1 平方多角数とペル方程式の関係

j 番目の p 角数 P_j は、

$$P_j = \frac{j\{j(p-2)-(p-4)\}}{2}$$

である。

平方 p 角数 S は $u = \sqrt{S}$ とおくと、

$$\frac{t\{t(p-2)-(p-4)\}}{2} = u^2$$

となる t を見つけることで得られる。

$$(1) t_n = A_n^2, \quad t_n(p-2)-(p-4) = 2B_n^2 \text{ から}$$

$$A_n^2(p-2) - 2B_n^2 = (p-4)$$

$$(2) t_n = 2A_n^2, \quad t_n(p-2)-(p-4) = B_n^2 \text{ から}$$

$$2A_n^2(p-2) - B_n^2 = (p-4)$$

を、それぞれ得る。これらは、

$$x_n^2 - qy_n^2 = \pm r$$

という形の方程式に変形できる。

特に、 $x_n^2 - qy_n^2 = \pm 1$ をペル方程式という。

ペル方程式

$$x_n^2 - qy_n^2 = \pm 1$$

x_0, y_0 を初期値とすると、

$$x_{n+1} + \sqrt{q}y_{n+1} = (x_n + \sqrt{q}y_n)(x_0 + \sqrt{q}y_0)$$

より、

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 q \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

の漸化式が得られる。

9

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{q}y_0 & 0 \\ 0 & x_0 - \sqrt{q}y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + \sqrt{q}y_0)^n & 0 \\ 0 & (x_0 - \sqrt{q}y_0)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

を得る。

11

一般項 x_n, y_n

$A = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 q \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$ の固有値は $x_0 + \sqrt{q}y_0, x_0 - \sqrt{q}y_0$ で、

さらに、 $x_0 + \sqrt{q}y_0$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix} \sqrt{q} \\ 1 \end{pmatrix}$ と $x_0 - \sqrt{q}y_0$

の固有ベクトル $\begin{pmatrix} \sqrt{q} \\ -1 \end{pmatrix}$ を $P = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{q} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと、

A は対角化される。

10

したがって

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{q} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_0 + \sqrt{q}y_0)^n & 0 \\ 0 & (x_0 - \sqrt{q}y_0)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{q} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2} \{ (x_0 + \sqrt{q}y_0)^{n+1} + (x_0 - \sqrt{q}y_0)^{n+1} \} \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{q}} \{ (x_0 + \sqrt{q}y_0)^{n+1} - (x_0 - \sqrt{q}y_0)^{n+1} \} \end{cases}$$

となる。

12

§ 2 ペル方程式の初期値と連分数

$x^2 - qy^2 = 1$ の初期値 x_0, y_0 を求める。

$$\sqrt{q} = [a_0; a_1; a_2; \dots] \quad [\text{連分数展開}]$$

循環する2つ手前までの数列を $[a_0, \dots, a_n]$ とする。

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = a_0, \quad \alpha_{j+1} = a_j \cdot \alpha_j + \alpha_{j-1}$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_{j+1} = a_j \cdot \beta_j + \beta_{j-1}$$

これにより,

$$x_0 = \alpha_n, \quad y_0 = \beta_n$$

となることが知られている。

13

§ 3 平方5角数

定理 平方5角数 S_n は

$$S_n = \frac{1}{32 \times 27} (W_n^4 - 12W_n^2)$$

ここで、 $W_n = (3 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n - (3 - \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n$

(証明)

j 番目の5角数は $\frac{j(3j-1)}{2}$ である。

この中の平方数となる番号の数列を $\{t_n\}$ とする。

$$\text{すなわち } \frac{t_n(3t_n-1)}{2} = u^2$$

15

たとえば、 $\sqrt{7} = [2; 1; 1; 1; 4; 1; 1; 1; 4; \dots]$

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \times 2 + 1 = 3$$

$$x_3 = 1 \times 3 + 2 = 5 \quad x_4 = 1 \times 5 + 3 = 8$$

$$y_0 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 1 \times 1 + 0 = 1$$

$$y_3 = 1 \times 1 + 1 = 2 \quad y_4 = 1 \times 2 + 1 = 3$$

よって、 $x_0 = 8, y_0 = 3$

$$\text{すなわち, } 8^2 - 7 \times 3^2 = 1$$

14

ケース1)

t_n を偶数とする。

このとき $3t_n - 1$ は奇数

よって $\gcd(t_n, 3t_n - 1) = 1$

したがって、 $t_n = 2B_n^2, 3t_n - 1 = A_n^2$ とできる。

ゆえに、 $A_n^2 - 6B_n^2 = -1$ を得る。

しかし、 $A_n^2 \equiv -1 \pmod{6}$ であるが、

$$\begin{bmatrix} A_n & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ A_n^2 & : & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

より、この場合の解は存在しない。

16

ケース 2)

t_n を奇数とする。

このとき $3t_n - 1$ は偶数なので、

$\gcd(t_n, 3t_n - 1) = 1$ である。

よって、 $t_n = A_n^2$, $3t_n - 1 = 2B_n^2$ とできる。

このとき $3A_n^2 - 2B_n^2 = 1$ が成り立つ。

$D_n = 3A_n$ とおくと、

$$D_n^2 - 6B_n^2 = 3$$

を得る。

初期値は $D_0 = 3, B_0 = 1$ である。

17

$D_n = 3A_n$, $t_n = A_n^2$ だったので、

$$t_n = \frac{1}{9}(3x_{n-1} + 6y_{n-1})^2$$

を得る。

$$x_{n-1} = \frac{1}{2} \left\{ (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n \right\}$$

$$y_{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ (5 + 2\sqrt{6})^n - (5 - 2\sqrt{6})^n \right\}$$

より、

19

一般論により、 $x_n^2 - 6y_n^2 = 1$ ($x_0 = 5, y_0 = 2$) の解は、

$$x_n = \frac{1}{2} \left\{ (5 + 2\sqrt{6})^{n+1} + (5 - 2\sqrt{6})^{n+1} \right\}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ (5 + 2\sqrt{6})^{n+1} - (5 - 2\sqrt{6})^{n+1} \right\}$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{さて、} \quad D_n + B_n\sqrt{6} &= (x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{6})(3 + \sqrt{6}) \\ &= (3x_{n-1} + 6y_{n-1}) + (x_{n-1} + 3y_{n-1})\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} \quad D_n = 3x_{n-1} + 6y_{n-1}$$

18

$$t_n = \frac{1}{18} \left\{ (3 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n - (3 - \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n \right\}^2$$

となる。

$$W_n = (3 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n - (3 - \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n$$

とおくと、平方5角数 S_n は $S_n = \frac{t_n(3t_n - 1)}{2}$ より

$$S_n = \frac{1}{32 \times 27} (W_n^4 - 12W_n^2)$$

(証明終)

20

平方5角数 S_n ($0 \leq n \leq 4$)

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 9,801 \quad \sqrt{S_1} = 99$$

$$S_2 = 94,109,401 \quad \sqrt{S_2} = 9,701$$

$$S_3 = 903,638,458,801 \quad \sqrt{S_3} = 950,599$$

$$S_4 = 8,676,736,387,298,001 \quad \sqrt{S_4} = 93,149,001$$

21

§4 一般平方 p 角数の定理

定理 $p \geq 3$ を平方数でない奇数とする。このとき、平方 p 角数 S_n は、もし存在するなら、以下の(1), (2)で表される。ただし、 $S_n = \frac{t_n \{(p-2)t_n - (p-4)\}}{2}$ で、 $\gcd(t_n, (p-2)t_n - (p-4)) = 1$ を仮定する。

(1) t_n が偶数の場合

$$\alpha\bar{\alpha} = -(p-4), \quad \varphi\bar{\varphi} = 1$$

を考える。ここで、 $\alpha = A_0 + \sqrt{q}B_0$, $\varphi = x_0 + \sqrt{q}y_0$, $q = 2(p-2)$ である。このとき、

$$S_n = \frac{1}{32(p-2)} (Z_n^4 - 4(p-4)Z_n^2)$$

ここで、 $Z_n = \alpha\varphi^n + \bar{\alpha}\bar{\varphi}^n$

23

(注意)

以下の議論において、

$$Z = a + \sqrt{q}b$$

に対し、

$$\bar{Z} = a - \sqrt{q}b$$

と書くことにする。

22

(2) t_n が奇数の場合

$\beta = (p-2) + \sqrt{q}$ とする。このとき、

$$S_n = \frac{1}{32(p-2)^3} (W_n^4 - 4(p-2)(p-4)W_n^2)$$

ここで、 $W_n = \beta\varphi^n + \bar{\beta}\bar{\varphi}^n$

24

(証明)

j 番目の p 角数は $\frac{j\{(p-2)j-(p-4)\}}{2}$ である。

この中の平方数となる j を小さい順に t_n ($n=1, 2, \dots$) とする。すなわち、

$$\frac{t_n \{(p-2)t_n - (p-4)\}}{2} = u^2$$

とする。

$$\begin{aligned} A_n + \sqrt{q}B_n &= (x_{n-1} + \sqrt{q}y_{n-1})(A_0 + \sqrt{q}B_0) \\ &= (A_0x_{n-1} + qy_{n-1}) + (B_0x_{n-1} + A_0y_{n-1})\sqrt{q} \end{aligned}$$

よって、 $B_n = B_0x_{n-1} + A_0y_{n-1}$

$t_n = 2B_n^2$ より、

$$t_n = 2(B_0x_{n-1} + A_0y_{n-1})^2$$

を得る。

$$\alpha = A_0 + \sqrt{q}B_0, \quad \varphi = x_0 + \sqrt{q}y_0$$

とおくと、

$$t_n = \frac{1}{2q} \left(\alpha\varphi^n - \overline{\alpha\varphi}^n \right)^2$$

となる。

ケース 1)

t_n を偶数とする。

このとき $(p-2)t_n - (p-4)$ は偶数である。

よって、 $t_n = 2B_n^2$, $(p-2)t_n - (p-4) = A_n^2$ とできる。

$q = 2(p-2)$ とおいたので、

$$A_n^2 - qB_n^2 = -(p-4) \quad (1)$$

を得る。このとき、

$$x_n^2 - qy_n^2 = 1 \quad (2)$$

を考える。

(1), (2) を満たす解が存在したとして議論をすすめる。

よって、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{t_n \{(p-2)t_n - (p-4)\}}{2} \\ &= \frac{p-2}{4q^2} \left\{ (\alpha\varphi^n + \overline{\alpha\varphi}^n)^4 - \frac{p-4}{2q} (\alpha\varphi^n - \overline{\alpha\varphi}^n)^2 \right\} \end{aligned}$$

したがって、

$$S_n = \frac{1}{32(p-2)} (Z_n^4 - 4(p-4)Z_n^2)$$

ここで、 $Z_n = \alpha\varphi^n + \overline{\alpha\varphi}^n$

ケース 2)

t_n を奇数とする。

このとき $(p-2)t_n - (p-4)$ は偶数である。

よって、 $t_n = A_n^2$, $(p-2)t_n - (p-4) = 2B_n^2$ とできる。

このとき $(p-2)A_n^2 - 2B_n^2 = p-4$ が成り立つ。

両辺を $p-2$ 倍し、 $D_n = (p-2)A_n$ とおくと

$$D_n^2 - 2(p-2)B_n^2 = (p-2)(p-4)$$

を得る。

初期値は $D_0 = p-2, B_0 = 1$ である。

29

$$D_n + \sqrt{q}B_n = (x_{n-1} + \sqrt{q}y_{n-1})(D_0 + \sqrt{q}B_0)$$

$$= (D_0x_{n-1} + qy_{n-1}) + (B_0x_{n-1} + D_0y_n)\sqrt{q}$$

よって、 $D_n = D_0x_{n-1} + qy_{n-1} = (p-2)x_{n-1} + qy_{n-1}$

$D_n = (p-2)A_n$, $t_n = A_n^2$ より、

$$t_n = \frac{1}{(p-2)^2} ((p-2)x_{n-1} + qy_{n-1})^2$$

を得る。

$$\beta = (p-2) + \sqrt{q}, \quad \varphi = x_0 + \sqrt{q}y_0$$

とおくと、

$$t_n = \frac{1}{4(p-2)^2} \left(\beta\varphi^n - \overline{\beta}\overline{\varphi}^n \right)^2$$

31

ゆえに、 $q=2(p-2)$ だったので、

$$D_n^2 - qB_n^2 = (p-2)(p-4) \quad (1)$$

を得る。このとき、

$$x_n^2 - qy_n^2 = 1 \quad (2)$$

を考える。

30

よって、

$$S_n = \frac{t_n \{ (p-2)t_n - (p-4) \}}{2}$$

$$= \frac{p-2}{4q^2} \left\{ (\beta\varphi^n + \overline{\beta}\overline{\varphi}^n)^4 - \frac{p-4}{2q} (\beta\varphi^n - \overline{\beta}\overline{\varphi}^n)^2 \right\}$$

したがって、

$$S_n = \frac{1}{32(p-2)^3} (W_n^4 - 4(p-2)(p-4)W_n^2)$$

ここで、 $W_n = \beta\varphi^n + \overline{\beta}\overline{\varphi}^n$

(証明終)

32

課題

$p=5$ の場合は完全に一般公式を得ることができた。

しかし、 $p>5$ の場合は、

$$\gcd(t_n, (p-2)t_n - (p-4)) = 1$$

を仮定しているために、定理は不完全である。

たとえば、 $p=7$ のときは、 t_n が3の倍数でないことがいえれば、定理は完全となる。

現在、上の仮定を必要としない p の場合についてより詳細な研究を行っているところである。