

レピュニツト数のカプレカー操作

津山高専数学クラブ

中村和樹 新免泰陽 竹久和宏

レピュニット数 R_k とは, $R_k = \underbrace{11\cdots 1}_k$ のことである。

R_k の n 乗を, n 乗カプレカー操作して得られる数を次のように表す。

$$Kp[R_k^n]$$

例

$$Kp[R_2^2] = Kp[11^2] = Kp[121] = 1 + 21 = 22 = 2R_2,$$

$$Kp[R_3^2] = Kp[111^2] = Kp[12321] = 12 + 321 = 333 = 3R_3,$$

$$Kp[R_4^2] = 4444 = 4R_4, \quad Kp[R_5^2] = 55555 = 5R_5,$$

$$Kp[R_6^2] = 6R_6, \quad Kp[R_7^2] = 7R_7,$$

$$Kp[R_8^2] = 8R_8, \quad Kp[R_9^2] = 9R_9,$$

$$Kp[R_{10}^2] = 1R_{10}, \quad Kp[R_{11}^2] = 2R_{11},$$

$$Kp[R_{12}^2] = 3R_{12}, \quad Kp[R_{13}^2] = 4R_{14}, \dots\dots$$

* $Kp[R_k^2]$ は, ある種の周期性をもっている。

研究から得られた2つの予想

予想1) レピュニット数の n 乗を, n 乗カプレカー操作した数 $Kp[R_k^n]$ について,

$$Kp[R_k^n] = \alpha_{k,n} R_k$$

とおいた時, $\alpha_{k,n}$ は自然数である。

予想2) n を固定する。その時, 数列 $\alpha_{k,n}$ は周期的で、周期の長さは 9^{n-1} である。

研究データ

- 2乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値

$\alpha_{k,n}$ の周期9

- 3乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値

$\alpha_{k,n}$ の 周期 $9^2=81$

- 4乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値

$\alpha_{k,n}$ の周期 $9^3=729$

- 5乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値

$\alpha_{k,n}$ の周期 $9^4=6561$

予想を証明するための考察

レピュニット数 R_k の n 乗を k -パスカル三角形で考えてみる。

たとえば, $R_3^4 = 111^4$ は3-パスカル三角形の4段目に対応している。

よって, $Kp[R_3^4]$ は, これらの数に何らかの関係を持つのではないかと考えた。

このことは, 一般的にいえるはず。

k-パスカル三角形のエリア

k-パスカル三角形を左からk個ずつ区切り,
それらの区画をエリア1, エリア2, ...と名付ける。

$$A_i^{[k,n]}(j)$$

を, n段目のエリアi の中の左からj 番目($1 \leq j \leq k$)
の数とする。

3-パスカル三角形

0段	1									
1段	1	1	1							
2段	1	2	3	2	1					
3段	1	3	6	7	6	3	1			
4段	1	4	10	16	19	16	10	4	1	
	エリア1			エリア2			エリア3			

$A_3^{[3,4]}(2) = 4$

3-パスカル三角形 $(x^2 + x + 1)^n$ の係数

111 ⁰ に対応	1									
111 ¹ に対応	1	1	1							
111 ² に対応	1	2	3	2	1					
111 ³ に対応	1	3	6	7	6	3	1			
111 ⁴ に対応	1	4	10	16	19	16	10	4	1	
	エリア1			エリア2			エリア3			

各段目の任意の j について,

$$\sum_{i=1}^3 A_i^{[3,2]}(j) = 3, \quad \sum_{i=1}^3 A_i^{[3,3]}(j) = 9, \quad \sum_{i=1}^3 A_i^{[3,4]}(j) = 27, \dots$$

となっている。

命題

k-パスカル三角形のn段目では,
任意の j について,

$$\sum_{i=1}^u A_i^{[k,n]}(j) = k^{n-1}$$

ここで, エリアの数 $u = [n - (n-1)/k]$

(証明)

k-パスカル三角形のn段目の左からm番目の数を, (n, m) とすると,

$$(n, m) = (n, m-1) + (n-1, m) - (n-1, m-k)$$

という関係式を持つ。これを使って示される。

K桁についてのカプレカー操作

自然数 a を, K 桁についてカプレカー操作するとは,
 a を下から K 桁ずつ区切って, それらの和をとることである。

特に, 1 桁についてカプレカー操作することを,
単純カプレカー操作という。

ところで, N 桁の自然数の m 乗カプレカー操作は,
 N 桁についてのカプレカー操作である。

$\beta_{k,n}$ の定義

k -パスカル三角形の n 段目を考える。
このとき,

$$R_k \cdot k^{n-1}$$

は R_k^n に k -パスカル三角形から $Kp[R_k^n]$ に, 関係があると考えられる。

$Kp[R_k^n] = \alpha_{k,n} R_k$ だったので, $\alpha_{k,n}$ には k^{n-1} が対応する
と考える。そこで, k^{n-1} を k 桁についてカプレカー操作したもの,
すなわち,

$$\beta_{k,n} = Kp[k^{n-1}]$$

と定義する。

一般に $\beta_{k,n} = \alpha_{k,n}$ とはならない。

しかし, $\beta_{k,n}$ と $\alpha_{k,n}$ との関係に興味を持つ。

例

$Kp[R_5^2]$ の場合

$k^{n-1} = 5^1 = 5$ より $\beta_{5,2} = Kp[5] = 5$ である。

一方, $Kp[R_5^2] = Kp[123454321] = 55555 = 5R_5$ より,
 $\alpha_{5,2} = 5$ である。この場合は, $\beta_{k,n} = \alpha_{k,n}$ である。

$Kp[R_5^3]$ の場合

$k^{n-1} = 5^2 = 25$ より $\beta_{5,3} = Kp[25] = 25$ である。

一方, $Kp[R_5^3] = Kp[1371700960631] = 377774 = 34R_5$ より,
 $\alpha_{5,3} = 34$ である。しかし, $2+5=3+4=7$ である。

(* 調べた全ての例で $\beta_{k,n}, \alpha_{k,n}$ は, それぞれ単純カプ
レカー操作で一致した。)

Re(1)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 1$$

$$\alpha = 1$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 1, \beta = 1$$

$$\alpha' = 1 \beta' = 1$$

Re(4)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 7777$$

$$\alpha = 7$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 16, \beta = 16$$

$$\alpha' = 7 \beta' = 7$$

Re(7)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 4444444$$

$$\alpha = 4$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 49, \beta = 49$$

$$\alpha' = 4 \beta' = 4$$

Re(2)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 44$$

$$\alpha = 4$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 4, \beta = 4$$

$$\alpha' = 4 \beta' = 4$$

Re(5)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 77777$$

$$\alpha = 7$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 25, \beta = 25$$

$$\alpha' = 7 \beta' = 7$$

Re(8)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 111111110$$

$$\alpha = 10$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 64, \beta = 64$$

$$\alpha' = 1 \beta' = 1$$

Re(3)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 999$$

$$\alpha = 9$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 9, \beta = 9$$

$$\alpha' = 9 \beta' = 9$$

Re(6)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 999999$$

$$\alpha = 9$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 36, \beta = 36$$

$$\alpha' = 9 \beta' = 9$$

Re(9)³ の場合

$$\text{Kp}[R^n] = 999999999$$

$$\alpha = 9$$

$$\text{Kp}[K^{(n-1)}] = 81, \beta = 81$$

$$\alpha' = 9 \beta' = 9$$

【予想】 n を固定する。その時, $\alpha_{k,n}$ の単純カプレカー操作を1桁になるまで繰り返し得られた数列 $\alpha'_{k,n}$ は周期である。

Re(5)¹ の場合

Kp[Rⁿ]= 11111

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

$\alpha' = 1 \beta' = 1$

Re(5)⁴ の場合

Kp[Rⁿ]= 188887

$\alpha = 17$

$\beta = 125$

$\alpha' = 8 \beta' = 8$

Re(5)⁷ の場合

Kp[Rⁿ]= 211109

$\alpha = 19$

$\beta = 15625$

$\alpha' = 1 \beta' = 1$

Re(5)² の場合

Kp[Rⁿ]= 55555

$\alpha = 5$

$\beta = 5$

$\alpha' = 5 \beta' = 5$

Re(5)⁵ の場合

Kp[Rⁿ]= 244442

$\alpha = 22$

$\beta = 625$

$\alpha' = 4 \beta' = 4$

Re(5)⁸ の場合

Kp[Rⁿ]= 255553

$\alpha = 23$

$\beta = 78125$

$\alpha' = 5 \beta' = 5$

Re(5)³ の場合

Kp[Rⁿ]= 77777

$\alpha = 7$

$\beta = 25$

$\alpha' = 7 \beta' = 7$

Re(5)⁶ の場合

Kp[Rⁿ]= 222220

$\alpha = 20$

$\beta = 3125$

$\alpha' = 2 \beta' = 2$

Re(5)⁹ の場合

Kp[Rⁿ]= 377774

$\alpha = 34$

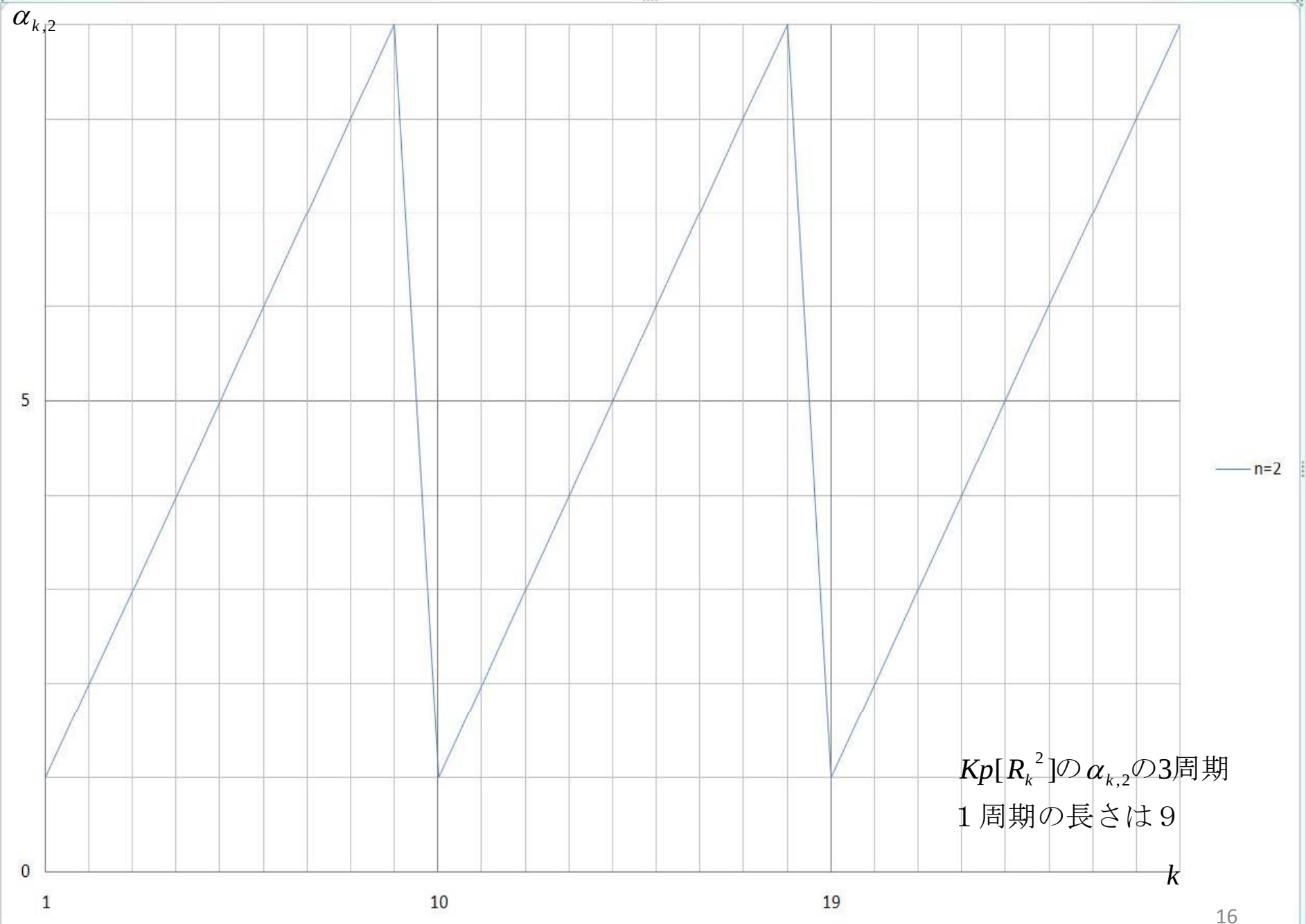
$\beta = 90628$

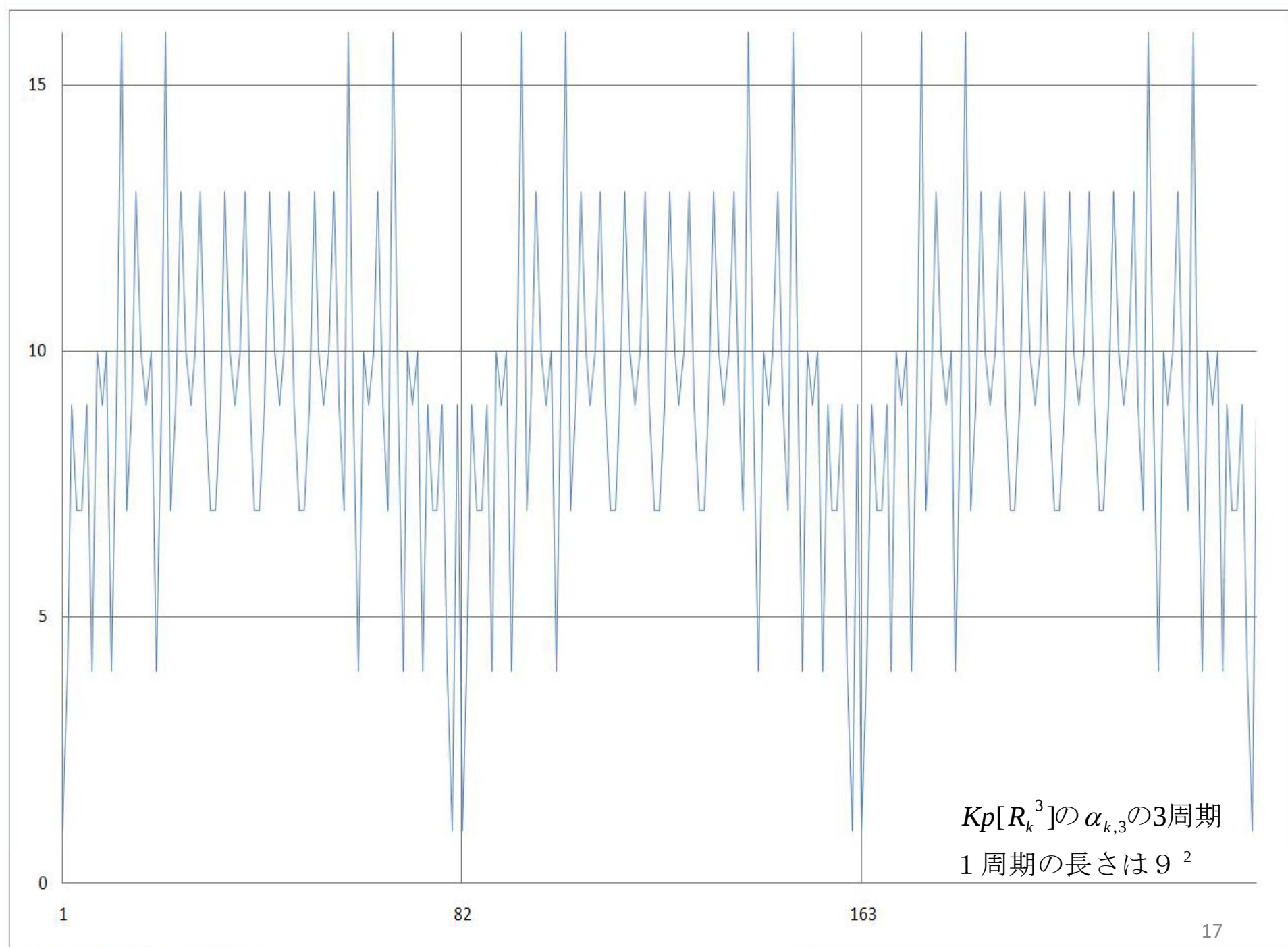
$\alpha' = 7 \beta' = 7$

【予想】 k を固定する。その時, $\alpha_{k,n}$ の単純カプレカー操作を
1桁になるまで繰り返し得られた数列 $\alpha'_{k,n}$ は周期である。

予想を証明するための 今後の取り組み

- 1) $\alpha_{k,n}$ と $\beta_{k,n}$ の関係性をより詳細に調べる。
- 2) 上のことから $\alpha_{k,n}$ が自然数であることは、証明できるはず。
- 3) $\alpha_{k,n}$ に関する周期性の予想は、 $\alpha'_{k,n}$ に関する周期性の予想が解決することから、得られる可能性がある。





20

10

0

1

730

18

$Kp[R_k^4]$ の $\alpha_{k,4}$ の2周期
1周期の長さは 9^3

