

# パスカル三角形の変形について

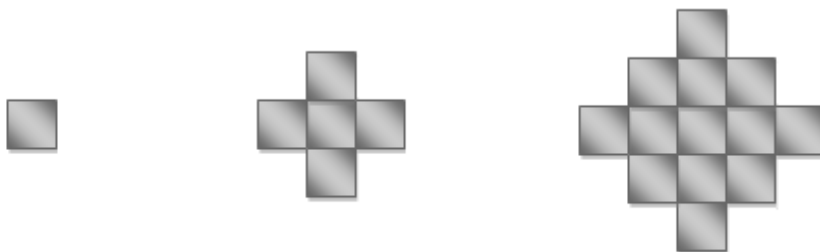
津山高専 電子制御工学科 2年 藪中悠貴

## 1. はじめに

中学2年のとき、ピンポン玉の積み上げ数を応用して面白い式を発見した。それは上から順に 1 段目に 1, 2 段目に 5, 3 段目に 13 というように積んでいくとき,  $n$  段目までの累計を計算してみると  $(2n^3+n)/3$  であった。これはすなわち  $2n^3+n$  が 3 の倍数であることを意味し, その証明もできた。このことを発展させるために, 図のような積み木を考察することから始めた。



対称性をもたせるために, 平面に投影したとき, 下図のような積木を考察する。



これを空間的に考えたものが中学のときの研究に対応する。  
これらの積み木数の数列は以下である。

平面: 1, 5, 13, 25, 41, ...,  
空間: 1, 7, 25, 63, 129, ...

この二つの数列から得られる規則性をもとに, 次の図表を構築した。  
それが以下の図である。この数表は対角線について対称性をもつ。また, パスカル三角形の類似性を感じたため, 我々はこれを Y 三角形と呼び研究を進めていくことにした。

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 1   | 1   | 1   | 1   | ... |
| 1   | 3   | 5   | 7   | 9   | ... |
| 1   | 5   | 13  | 25  | 41  | ... |
| 1   | 7   | 25  | 63  | 129 | ... |
| 1   | 9   | 41  | 129 | 321 | ... |
| 1   | 11  | 61  | 231 | 681 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

## 2. パスカル三角形

まず, パスカル三角形を復習する。以下の図がパスカル三角形である。パスカル三角形の上から  $n$  番目, 左から  $j$  番目の数を  $\binom{n}{j}$  ( $n \geq 0, j \geq 0$ ) とする。例えば,

$\binom{0}{0}=1, \binom{1}{0}=1, \binom{1}{1}=1, \binom{2}{0}=1, \binom{2}{1}=2, \binom{2}{2}=1, \dots$  である。そして, パスカル三角形は,  
 $\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}$  で帰納的に構成されている。

また, パスカル三角形は組み合わせ数との関係があり, 関係式  $\binom{n}{j} = {}_nC_j$  が成り立つ。

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   |     |     |     |     |     |
| 1   | 1   |     |     |     |     |
| 1   | 2   | 1   |     |     |     |
| 1   | 3   | 3   | 1   |     |     |
| 1   | 4   | 6   | 4   | 1   |     |
| 1   | 5   | 10  | 10  | 5   | 1   |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

【 パスカル三角形 】

### 3. Y 三角形の定義

パスカル三角形のときと同様に, これから考える数の三角形の構成要素の左から  $n$  番目, 上から  $j$  番目の数を  $\binom{n}{j}$  ( $n \geq 0, j \geq 0$ ) とする。そして,  $\binom{0}{j} = 1$  ( $j \geq 0$ ),  $\binom{n}{0} = 0$  ( $n \geq 1$ ),  $\binom{n}{1} = 0$  ( $n \geq 2$ ) とし,  $\binom{n}{j}$  ( $n \geq 2, j \geq 2$ ) が帰納的に  $\binom{n}{j} = \binom{n-2}{j-1} + \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}$  と定義されて作られた数の三角形を, Y 三角形と呼ぶことにする。以後, Y 三角形の要素  $\binom{n}{j}$  を  ${}_nY_j$  と表す。

最初の研究として, パスカル三角形との関係を調べる。まず二つの三角形を比較する。

|                    |     |     |     |     |                      |     |     |     |     |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|----------------------|-----|-----|-----|-----|
| 1                  |     |     |     |     | 1                    |     |     |     |     |
| 1                  | 1   |     |     |     | 1                    | 1   |     |     |     |
| 1                  | 3   | 1   |     |     | 1                    | 2   | 1   |     |     |
| 1                  | 5   | 5   | 1   |     | 1                    | 3   | 3   | 1   |     |
| 1                  | 7   | 13  | 7   | 1   | 1                    | 4   | 6   | 4   | 1   |
| ...                | ... | ... | ... | ... | ...                  | ... | ... | ... | ... |
| (Y 三角形 ${}_nY_j$ ) |     |     |     |     | (パスカル三角形 ${}_nC_j$ ) |     |     |     |     |

深い観察から,

$${}_nY_0 = {}_nC_0, \quad {}_nY_1 = {}_{n-1}C_1 + {}_nC_1, \quad {}_nY_2 = {}_{n-2}C_2 + 2 \cdot {}_{n-1}C_2 + {}_nC_2,$$

$${}_nY_3 = {}_{n-3}C_3 + 3 \cdot {}_{n-2}C_3 + 3 \cdot {}_{n-1}C_3 + {}_nC_3, \quad {}_nY_4 = {}_{n-4}C_4 + 4 \cdot {}_{n-3}C_4 + 6 \cdot {}_{n-2}C_4 + 6 \cdot {}_{n-1}C_4 + {}_nC_4, \dots$$

であることを発見した。これにより, 各  $j$  について  ${}_nY_j$  を考えると, パスカル三角形の  $j$  段目の数列が見えてくる。すなわち, 次の定理1を得る。証明は省略するが, 二重帰納法を使った。

定理 1 
$${}_nY_j = \sum_{i=0}^j {}_jC_i \cdot {}_{n-j+i}C_j$$

#### 4. Y(k) 三角形の定義

Y 三角形を一般化することを考える。k を実数とし、 $\binom{0}{j}=1 \ (j \geq 0), \binom{n}{0}=0 \ (n \geq 1),$   
 $\binom{n}{1}=0 \ (n \geq 2)$  とし、 $\binom{n}{j} \ (n \geq 2, j \geq 2)$  が帰納的に  $\binom{n}{j}=k\binom{n-2}{j-1}+\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}$  と定義され  
 て作られた数の三角形を、Y(k) 三角形と呼ぶことにする。以後、Y(k) 三角形の要素  $\binom{n}{j}$  を  ${}_n Y_j^k$  と  
 表す。

特に、Y(0) 三角形はパスカル三角形で、Y(1) 三角形は Y 三角形である。また、Y(-1) 三角形は  
 全ての構成要素が1から成る三角形である。以下の図が Y(k) 三角形である。

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 1 & & 1 & & & \\
 1 & & k+2 & & 1 & \\
 1 & & (2k+3) & & (2k+3) & & 1 \\
 1 & & (3k+4) & & (k^2+6k+6) & & (3k+4) & & 1 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

【 Y(k) 三角形 】

定理1と同様な研究を行うと、

$${}_n Y_0^k = {}_n C_0, \quad {}_n Y_1^k = k \cdot {}_{n-1} C_1 + {}_n C_1, \quad {}_n Y_2^k = k^2 \cdot {}_{n-2} C_2 + 2k \cdot {}_{n-1} C_2 + {}_n C_2,$$

$${}_n Y_3^k = k^3 \cdot {}_{n-3} C_3 + 3k^2 \cdot {}_{n-2} C_3 + 3k \cdot {}_{n-1} C_3 + {}_n C_3,$$

$${}_n Y_4^k = k^4 \cdot {}_{n-4} C_4 + 4k^3 \cdot {}_{n-3} C_4 + 6k^2 \cdot {}_{n-2} C_4 + 6k \cdot {}_{n-1} C_4 + {}_n C_4, \dots$$

であることがわかる。すなわち、次の定理2を得る。 証明は定理1と同じ二重帰納法を使う。

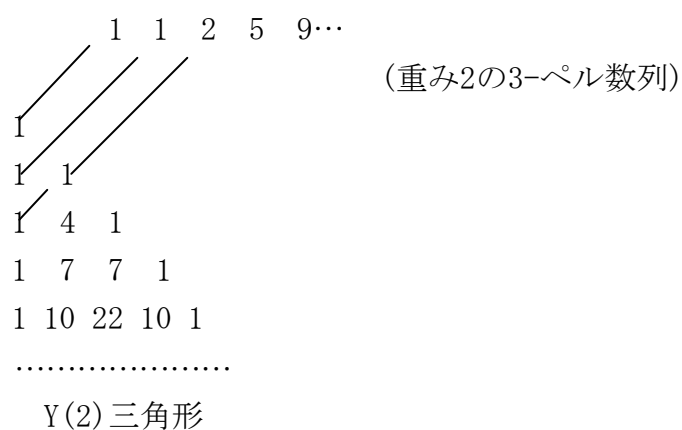
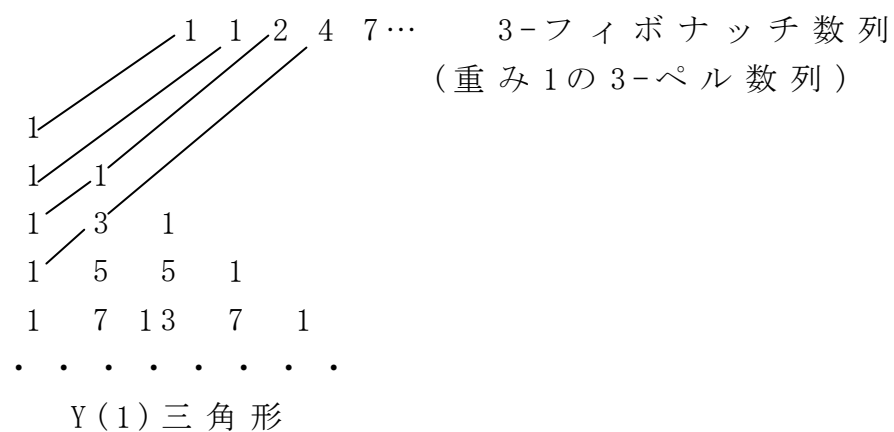
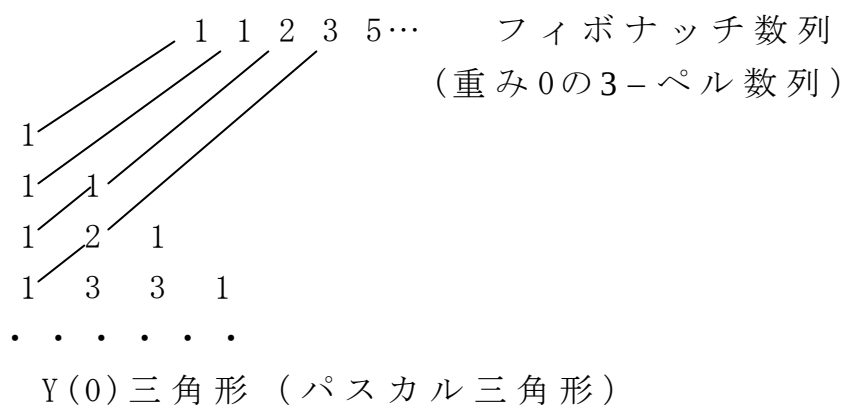
定理2 
$${}_n Y_j^k = \sum_{i=0}^j k^{j-i} {}_j C_i \cdot {}_{n-j+i} C_j$$

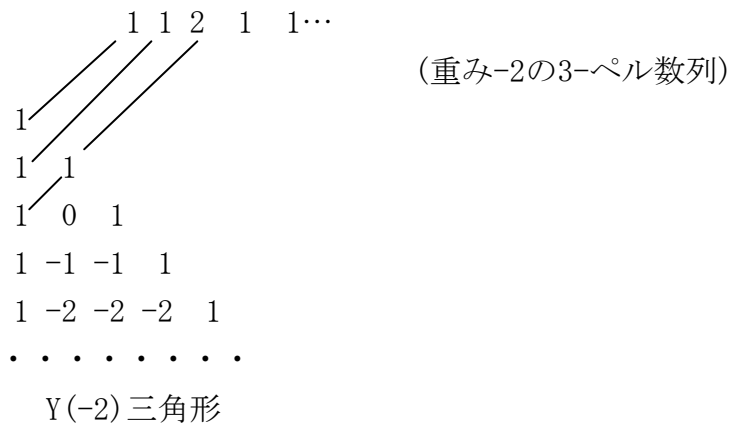
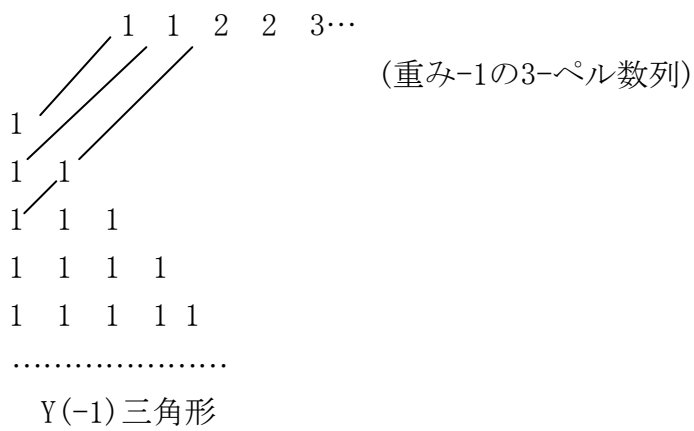
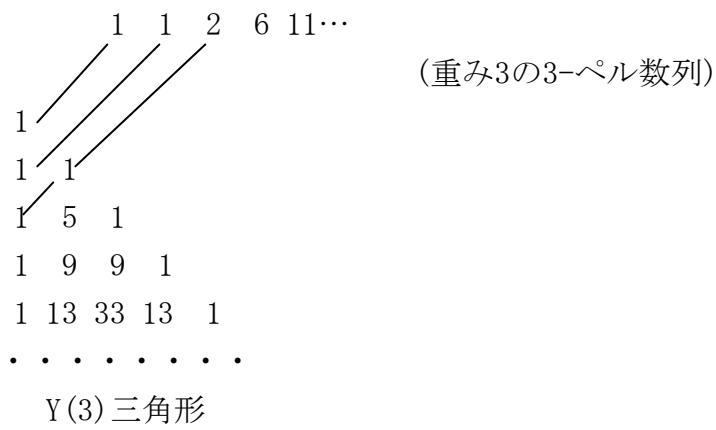
#### 5. 重み k の 3-ペル数列について

ペル数列  $\{P_n\}$  とは、漸化式  $P_1=1, P_2=1, P_n=2P_{n-2}+P_{n-1}$  から得られる数列のことである。今回の  
 の研究において、我々は、重み k の 3-ペル数列という数列を以下のように定義した。すなわち、重  
 み k の 3-ペル数列とは、漸化式  $P_1=1, P_2=1, P_2=2, P_n=kP_{n-3}+P_{n-2}+P_{n-1} \ (n \geq 3)$  から得られる数

列のことである。

$Y(k)$  三角形と重み  $k$  の 3-ペル数列の関係は以下の図の通りである。





以上のことから、次の定理を得た。

**定理 3** Y( $k$ ) 三角形の数を斜めに足して得られる数列は、重み  $k$  の 3-ペル数列である。

## 6. Y(k) 三角形の母関数

パスカル三角形の生成式  $x+1$  で  $(x+1)^n$  の係数がパスカル三角形の  $n$  段目の数となっている。  
 $k \neq 0$  (パスカル三角形以外) のとき生成式は何かという問いをたてた。しかしこれを見つけることはできなかった。そこで、 $n$  列目の母関数を研究することにした。

$k=0$  すなわち、パスカル三角形の母関数を考える。つまり、パスカル三角形の  $n$  列目の係数を使って、ベキ級数を考えると

$$(1 \text{ 列目}) \quad 1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$$

$$(2 \text{ 列目}) \quad 1+2x+3x^2+\dots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(3 \text{ 列目}) \quad 1+3x+6x^2+\dots=\frac{1}{(1-x)^3}$$

一般に  $n$  列目の母関数は  $\frac{1}{(1-x)^n}$  であることがわかる。

次に、 $k=1$  の場合、すなわち Y(1) 三角形の母関数を求めよう。

$$(1 \text{ 列目}) \quad 1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$$

$$(2 \text{ 列目}) \quad 1+3x+5x^2+\dots=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$

$$(3 \text{ 列目}) \quad 1+5x+13x^2+\dots=\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$$

$$(4 \text{ 列目}) \quad 1+7x+25x^2+\dots=\frac{(1+x)^3}{(1-x)^4}$$

これらの数式から  $n$  列目の母関数は  $\frac{(1+x)^{n-1}}{(1-x)^n}$  であることが予想される。

以下、上の母関数の導出を説明する。例えば、2 列目の母関数  $1+3x+5x^2+\dots=\frac{1+x}{(1-x)^2}$  を導出しよう。

$$S_1=1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x} \quad (\text{パスカル三角形の 2 列目}), \quad S_2=1+2x+3x^2+\dots=\frac{1}{(1-x)^2} \quad (\text{パスカル}$$

ル三角形の 2 列目) であった。そこで、 $\Psi_2=1+3x+5x^2+7x^3+\dots$  (Y(1) 三角形の 2 列目) とおく。

く。  $3xS_1 = 3x+3x^2+3x^3+3x^4+\dots$  から、

$$\begin{aligned}
\Psi_2 - 3xS_1 &= 1 + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + \dots \\
&= 1 + 2x^2(1 + 2x + 3x^2 + \dots) \\
&= 1 + 2x^2S_1
\end{aligned}$$

よって、 $\Psi_2 = 1 + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{3x}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$  を得る。

同様の計算により一般に、 $\Psi_n \cdot (1-x)^{n-1} = S_1 \cdot (1+x)^{n-1}$  という関係式がわかる。これにより

$$\Psi_n = \frac{(1+x)^{n-1}}{(1-x)^n} \text{ がわかった。}$$

次に、 $Y(k)$  三角形の 2 列目の母関数  $\Psi_2^k$  を考えよう。

$$\Psi_2^k = 1 + (k+2)x + (2k+3)x^2 + (3k+4)x^3 + (4k+5)x^4 + \dots$$

であり、 $(k+2)xS_1 = (k+2)x + (2k+3)x^2 + (3k+4)x^3 + (4k+5)x^4 + \dots$  により、

$$\begin{aligned}
\Psi_2^k - (k+2)xS_1 &= 1 + (k+1)x^2 + (2k+2)x^3 + (3k+3)x^4 + \dots \\
&= 1 + (k+1)x^2 \{1 + 2x + 3x^2 + \dots\} \\
&= 1 + (k+1)x^2S_2
\end{aligned}$$

を得る。よって  $\Psi_2^k = 1 + \frac{(k+1)x^2}{(1-x)^2} + \frac{(k+2)x}{1-x} = \frac{1+kx}{(1-x)^2}$  である。

同様の計算により一般に、 $\Psi_n^k \cdot (1-x)^{n-1} = S_1 \cdot (1+kx)^{n-1}$  という関係式を得る。

これにより、 $\Psi_n^k = \frac{(1+kx)^{n-1}}{(1-x)^n}$  を得る。

定理 4  $\Psi_n^k$  を  $Y(k)$  三角形の第  $n$  列を係数にもつべき級数とすると、 $\Psi_n^k = \frac{(1+kx)^{n-1}}{(1-x)^n}$  である。

## 7. 重み $k$ の 3-ペル数列の母関数

$Y(k)$  三角形の第  $n$  を係数にもつべき級数の母関数が明らかになったので、次に、重み  $k$  の 3-ペ

ル数列の母関数にも興味があったので研究を行った。

$\Phi_k$  を重み  $k$  の 3-ペル数列を係数にもつべき級数とする。すなわち、

$$\Phi_k = 1 + x + 2x^2 + (k+3)x^3 + (2k+5)x^4 + (5k+8)x^5 + \dots$$

としよう。まず、重み 0 の 3-ペル数列 (フィボナッチ数列) の母関数を求める。

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots \\ &= 1 + x(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots) \\ &\quad + x^2(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots) \\ &= 1 + (x + x^2)\Phi_0\end{aligned}$$

よって  $\Phi_0 = \frac{1}{1-x-x^2}$  となる。

次に、重み 1 の 3-ペル数列の母関数を求める。

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + \dots \\ &= 1 + x(1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + \dots) \\ &\quad + x^2(1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + \dots) \\ &\quad + x^3(1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + \dots) \\ &= 1 + (x + x^2 + x^3)\Phi_1\end{aligned}$$

よって、 $\Phi_1 = \frac{1}{1-x-x^2-x^3}$  を得る。

同様に、重み 2 の 3-ペル数列の母関数を求めると  $\Phi_2 = \frac{1}{1-x-x^2-2x^3}$  となる。

一般に、重み  $k$  の 3-ペル数列の母関数を求める。

$$\begin{aligned}\Phi_k &= 1 + x + 2x^2 + (k+3)x^3 + (2k+5)x^4 + (5k+8)x^5 + \dots \\ &= 1 + x(1 + x + 2x^2 + (k+3)x^3 + (2k+5)x^4 + (5k+8)x^5 + \dots) \\ &\quad + x^2(1 + x + 2x^2 + (k+3)x^3 + (2k+5)x^4 + (5k+8)x^5 + \dots) \\ &\quad + 2x^3(1 + x + 2x^2 + (k+3)x^3 + (2k+5)x^4 + (5k+8)x^5 + \dots) \\ &= 1 + (x + x^2 + kx^3)\Phi_k\end{aligned}$$

よって、 $\Phi_k = \frac{1}{1-x-x^2-kx^3}$  となる。

**定理 5**  $\Phi_k$  を重み  $k$  の 3-ペル数列を係数とするべき級数を、

$\Phi_k = 1 + x + 2x^2 + (k+3)x^3 + (2k+5)x^4 + (5k+8)x^5 + \dots$  とするとき、 $\Phi_k = \frac{1}{1-x-x^2-kx^3}$  である。

## 8. 今後の展望

今回の研究を通して、 $Y(k)$  三角形の生成式が見つからなかったので、今後これらの発見を進めたい。さらに、各定理にまだ拡張を感じたのでその続きをし、これらの応用性の研究を進めていきたい。また、自分の専門である電子制御工学に関することであるが、電力が瞬間的に立ち上がり、その後安定する関数が重視されており、現在は、パスカル三角形を係数とするある種の関数のラプラス変換というものが使われているそうである。今後、その部分に我々の数の三角形を適応させた場合の研究も行ってみたいと考えている。