

周期 T をもつ n 乗根のフラクタル連分数について

間庭 早紀子, 丸尾 優佳 (津山高専 4 年)

研究目的: ペル方程式は連分数展開で解くことができるという定理がある. 2 次ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解法は 1766 年に既に示されている. $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ については, Thue の定理よりの解は高々有限個しかないことが知られている. したがって, n 次ペル方程式を議論することは意味がないように思われる. しかし, 私たちは, 3 乗根以上の通常とは異なる連分数で周期性を持つようなものが構成できれば, n 次ペル方程式を別な視点から研究することができるのではないかと考えた.

研究方法: 研究は, 以下の手順で行った.

(1)	$\sqrt[n]{D}$ でも周期性を持つような新しい連分数展開法と, 近似分数列を構成する.
(2)	$\sqrt[n]{D}$ の近似分数列と n 次ペル方程式との関係を詳細に研究する.
(3)	正則という言葉 키워드를, $\sqrt[n]{D}$ の新たな連分数展開について研究し, その結果から n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の新しい理論を構築する.

研究結果: まず, 平方根の正則連分数を, n 乗根へ拡張することを意識し再構成した. そして, 従来の連分数とは全く別の新しいタイプの連分数展開 (フラクタル連分数と呼ぶ) を生みだし, そこから n 次ペル方程式と関係の深い近似分数列を得る行列表現 (ペル表現と呼ぶ) を構成することに成功した.

私たちは平方根について周期 1 と周期 2 の連分数から得られるペル表現をつくり, それから得られる近似分数がすべて 2 次のペル方程式の解になることを示した. そして, 3 乗根と 4 乗根についても周期 1 と周期 2 の連分数から得られる私たちの考えたペル表現から得られる近似分数について, それらはすべて, $\text{mod } p$

($p = n, n^2$) について, n 次ペル方程式の解となっているという定理を得た. それは, ペル表現の規則性から 5 乗根以上でも成り立つことが自然に予想される.

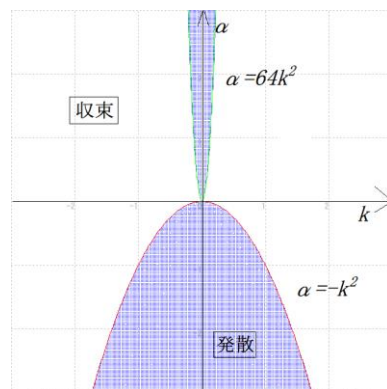
$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \text{ のペル表現 (周期 1 の場合)}$$
$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{n-1} & k^n + \alpha \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^{n-2} & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

ただし, $x_0 = 1, y_0 = 0$ とする.

定理. $n \geq 3$ のとき, $\sqrt[n]{k^n + 1}$ の周期 1 と周期 2 のペル表現から得られる全ての (x_r, y_r) は, どちらもペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1 \pmod{p}$ の解である. ここで, $p = n, n^2$ である.

さらに, 周期 3 についても 3 乗根と 4 乗根に関する同様な結果を得ることもできた.

一方, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現に関し, (k, α) を自然数ではなく, 実数として扱う研究も行っている. つまり, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現から得られる近似小数 $t_r = x_r / y_r$ を関数 $t_r = f(k, \alpha)$ と考え, t_r の発散と収束をもたらす領域 (k, α) はどのようなものであるかといった研究を行った. コンピュータによる数値計算結果ではあるが, 特に発散と収束の境界が $\alpha = Ak^n$ (A は定数) ではないかという興味深い結果を得た.



(図) 周期 1 の $t_r = f_2(k, \alpha)$ の様子

1. 研究の動機と目的および研究計画

ペル方程式は連分数展開で解くことができるという定理がある ([1] 参照). ペル方程式とは $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ (D は平方数でない自然数) という形の不定方程式である. この方程式の解法は, 1766 年に Lagrange が示したものが有名で, $\sqrt{D}$ の周期的な正則連分数から得られる近似分数に関係することが分かっている. 一方, $\sqrt{D}$ の連分数は周期性を持っているが, $n \geq 3$ の $\sqrt[n]{D}$ は従来の連分数展開では周期性を持たない. さらに, Thue の定理より $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の解は高々有限個しかないことも分かっている. このようなことから, $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の解の理論は一見意味がないと考えがちである. しかし, 私たちは従来の考え方を捨て, 3 乗根以上の通常とは異なる連分数で周期性を持つようなものが構成できれば, n 次ペル方程式を別な視点から研究することで, 新しい理論を構築できるのではないかと考え, その研究計画を立てた (表 1).

表 1 : 研究計画と実施年度

(1)	$\sqrt[n]{D}$ でも周期性を持つような新しい連分数展開法と, 近似分数列を構成する.	平成 24 年度
(2)	$\sqrt[n]{D}$ の近似分数列と n 次ペル方程式との関係を詳細に研究する.	平成 25 年度
(3)	正則という言葉 키워ドに, $\sqrt[n]{D}$ の新たな連分数展開について研究し, その結果から n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の新しい理論を構築する.	平成 26 年度

研究計画の (1) は一昨年 (平成 24 年度) 行った. そして, 私たちは, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ (k, α は任意の自然数で $0 \leq \alpha \leq k$) という形の n 乗根に関する連分数展開の新しい展開方法の構築に成功した. この展開法から得られる新しい形の連分数は, 周期性というよりもフラクタル性という言葉で表現した方が適切であったため, n 次フラクタル連分数と呼ぶことにした. 更に, フラクタル連分数から, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列が得られる行列表現 (n 次ペル表現と呼んでいる) を構成した. 以上の研究の成果が認められ, JSEC2012 では佳作を受賞した.

研究計画の (2) は昨年 (平成 25 年度) に行った. 上記した通り, 2 次ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解法は $\sqrt{D}$ の近似分数に関係することが分かっている. したがって, 私たちが構成した n 次ペル表現から得られる近似分数は, n 次ペル方程式に何らかの関係があると思い研究に着手した. まず私たちは, n 次ペル表現から得られる $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数 x_r/y_r (ただし, $x_0 = 1, y_0 = 0$) から $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n$ を定義した. そして u_r をペル関数と呼び, その詳細な研究を行った. 特に, $\alpha = 1$ の場合に関しては, 2 次ペル方程式 $x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2 = \pm 1$ の多くの解を, Lagrange の解法より高速に見つけられる成果が得られた. n 次の場合は Thue の定理より $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の解は高々有限個しかないことが分かっている. そこで, 私たちは n 次ペル方程式に関しては mod m の世界での研究を行った. その結果, 私たちが目指す新しい n 次ペル方程式の理論構築に関する有益ないくつかの手がかりを得ることができた. 私たちはこれらの研究から JSEC2013 の最終選考会で優等賞を受賞した.

研究計画の (3) は今年度行った. 昨年の研究結果の問題点を改善し, 当初目指していたペル方程式の理論の構築に, より近づいてきた. 今年度, 私たちはまず, ペル方程式と関係のある正則連分数という言葉に着目し, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 2 や 3 をもつ正則フラクタル連分数展開を構築した. そして, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の正則フラクタル連分数展開から $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列が得られる行列表現を構成し, n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の新しい理論を研究した.

2. フラクタル連分数とペル表現の定義, および主結果

D を $k^2 + \alpha$ とおくと, $\sqrt{k^2 + \alpha} = k + \frac{\alpha}{2k + \frac{\alpha}{2k + \dots}}$ と連分数展開される. これを,

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim [k, \frac{\alpha}{2k + (*)}]$$

と書く. ここで, $(*)$ は $\frac{\alpha}{2k + (*)}$ が入れ子状になっていくことを意味する. この連分数から $\sqrt{k^2 + \alpha}$

の一つの分数列 x_r/y_r を作ると, それは,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる. 私たちは, これを $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現と呼んだ. そして, 重要な結果として, $x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$ が得られた. つまり, $\alpha = 1$ なら, (x_r, y_r) はペル方程式の解となっているのである. このことから $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現が構成できれば, n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ の理論が構築できるのではと考えた.

一般に $\sqrt[n]{D}$ について $D = k^n + \alpha$ とおいて, $t = \sqrt[n]{k^n + \alpha}$ を,

$$t = k + \frac{\alpha}{k^{n-1} + k^{n-2}t + \dots + t^{n-1}}$$

と変形する. 右辺に現れる t に再び, 右辺全体を入れていけば, 新しいタイプの連分数が得られる.

これを私たちは $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 1 のフラクタル連分数と呼んだ.

例えば, $\sqrt[3]{3}$ の周期 1 のフラクタル連分数は, 私達の連分数展開を用いると,

$$\sqrt[3]{3} = 1 + \frac{2}{3 + 3 \left[\frac{2}{3 + 3 \left(\frac{2}{3 \dots} \right) + \left(\frac{2}{3 \dots} \right)^2} \right] + \left[\frac{2}{3 + 3 \left(\frac{2}{3 \dots} \right) + \left(\frac{2}{3 \dots} \right)^2} \right]^2}$$

となり, これを私たちの表記では,

$$\sqrt[3]{3} \sim [1, \frac{2}{3 + 3(*) + (*)^2}]$$

と表す. 一般に, 3 乗根 $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$, 4 乗根 $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ と n 乗根 $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 1 のフラクタル連分数は, 私たちの記号で表すと,

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[k, \frac{\alpha}{3k^2 + 3k(*) + (*)^2} \right], \quad \sqrt[4]{k^4 + \alpha} \sim \left[k, \frac{\alpha}{4k^3 + 6k^2(*) + 4k(*)^2 + (*)^3} \right],$$

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \frac{\alpha}{{}_nC_1 + {}_nC_2(*) + {}_nC_3(*)^2 + \dots + {}_nC_{n-1}(*)^{n-1} + (*)^n} \right]$$

となる. そして, これから, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの分数列 x_r/y_r を作るためのペル表現が得られる. それが以下である.

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{n-1} & k^n + \alpha \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^{n-2} & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

私たちの主結果を以下に列挙する.

定理 1. $\sqrt{k^2 + 1}$ の周期 1 のペル表現から得られる (x_r, y_r) はペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解である. さらに, $\sqrt{(k+1)^2 - 1}$ は $\sqrt{(k+1)^2 - 1} \sim [k, \frac{1}{1 + \frac{1}{2k+(*)}}]$ と周期 2 の正則連分数展開を持ち, このとき, ペル表現は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 - 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, そして, (x_r, y_r) はペル方程式 $x^2 - \{(k+1)^2 - 1\}y^2 = \pm 1$ の解となる.

定理 2. $n \geq 3$ のとき, $\sqrt[n]{k^n + 1}$ の周期 1 のペル表現(2.1)から得られる (x_r, y_r) は, ペル方程式 $x^n - (k^n + 1)y^n = \pm 1 \pmod{p}$ の解である. ここで, $p = n, \quad n^2$ である.

定理 3. $n \geq 3$ のとき, $\sqrt[n]{(k+1)^n - 1}$ は,

$$\sqrt[n]{(k+1)^n - 1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{{}_nC_1 + {}_nC_2(*) + {}_nC_3(*)^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}(*)^{n-1} + (*)^n}} \right]$$

と周期 2 の正則フラクタル連分数展開を持ち, このとき, ペル表現は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{n-1} & (k+1)^n - 1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{n-2} & (k+1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, そして, (x_r, y_r) はペル方程式 $x^n - \{(k+1)^n - 1\}y^n = \pm 1 \pmod{p}$ の解である. ここで, $p = n, \quad n^2$ である.

(注意) 定理 2 と 3 について, $n \geq 5$ の場合は予想である. また, フラクタル連分数が周期 3 である $\sqrt[n]{(k+1)^n + 1}$ ($n=3, 4$) に関する結果も得ている (§ 4.3 参照).

3. 周期 1 のフラクタル連分数とペル方程式について

3.1. 平方根の場合

まず, $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 1 の連分数展開を, n 乗根の周期的な新しい連分数展開を睨んで再構成し

ていく． $t = \sqrt{k^2 + \alpha}$ を $t = k + \frac{\alpha}{k+t}$ と変形し，この右辺の t に右辺全体である自分自身を代入することで，周期 1 をもつ $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の連分数が構築できる．すなわち，

$$\sqrt{k^2 + 1} = k + \frac{\alpha}{2k + \frac{\alpha}{2k + \ddots}}$$

となる．これを私たちは，

$$\sqrt{k^2 + 1} \sim \left[k, \frac{\alpha}{2k + (*)} \right]$$

と表す．ここで， $(*)$ は $\frac{\alpha}{2k + (*)}$ が入れ子状になっていくことを意味する．特に， $\alpha = 1$ のときを **正則連分数** という．したがって，この意味で周期 1 をもつ正則連分数展開は $\alpha = 1$ に限る．

次に，周期 1 をもつ $\sqrt{k^2 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = k + \frac{1}{k+t_{r-1}}$ ， $t_r = x_r/y_r$ とおいて整理することで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

となる．ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ を考えて，初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

命題 1. $\sqrt{k^2 + 1}$ のペル表現 (3.1) から得られる (x_r, y_r) は，2 次ペル方程式 $x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2 = \pm 1$ の解である．

証明 $u_r = x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2$ と置くと， $u_0 = 1$ であり， $u_r = -u_{r-1}$ が成り立つことから示される．
(証明終)

(注意) $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のペル表現は

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}$$

であり，これから得られる (x_r, y_r) は， $u_r = x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2$ と置くと， $u_0 = 1$ であり， $u_r = -\alpha u_{r-1}$ が成り立つ．すなわち， $x_r^2 - (k^2 + 1)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$ が成り立つ．

3.2. n 乗根の場合

まず， $\sqrt[n]{k^3 + \alpha}$ の周期 1 の正則フラクタル連分数について考察する．これは， $t = \sqrt[n]{k^3 + \alpha}$ を

$$t = k + \frac{1}{A + B(t-k) + (t-k)^2} \quad (3.2)$$

と置いて， A, B を決定することで得られるものとした．(3.2) を整理すると，

$$t = \frac{kt^2 + (kB - 2k^2)t + k^3 - Bk^2 + Ak + 1}{t^2 + (B - 2k)t + k^2 - Bk + A} \quad (3.3)$$

を得る．(3.3) の分母を払い， $t^3 = k^3 + \alpha$ という形になるためには，

$$\alpha = 1, \quad A = 3k^2, \quad B = 3k$$

でなくてはならない。したがって、(3.2)は、

$$t = k + \frac{1}{3k^2 + 3k(t-k) + (t-k)^2} \quad (3.4)$$

と書け、これを、私たちは、

$$\sqrt[3]{k^3 + 1} \sim [k, \frac{1}{3k^2 + 3k(*) + (*)^2}]$$

と表す。ここで、(*)は $\frac{1}{3k^2 + 3k(*) + (*)^2}$ が入れ子状になっていくことを意味する。これが、私たちの考

えた $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ の周期 1 の正則フラクタル連分数である。

周期 1 の正則フラクタル連分数により、 $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は、(3.4) の t を $t_r = x_r/y_r$ と置いて漸化式にすることで、

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 + 1 \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

となる。特に、ペル方程式 $x^3 - Dy^3 = \pm 1$ を考えて、初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。これを、 $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ のペル表現という。

命題 2. $\sqrt[3]{k^3 + 1}$ のペル表現(3.5)から得られる (x_r, y_r) は、3 次ペル方程式

$$x_r^3 - (k^3 + 1)y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である。ここで、 $p = 3, 9$ である。

証明 $u_r = x_r^3 - (k^3 + 1)y_r^3$ と置くと、 $u_0 = -1, u_1 = 9k^3 + 1,$

$$u_r = -u_{r-1}\{(x_{r-1} + ky_{r-1})^3 + (1 + k^3)y_{r-1}^3\}$$

であることを用いると証明できる。(証明終)

$\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ の周期 1 のフラクタル連分数についても、3 乗根の場合を拡張させてうまくいく。すなわち、周期 1 の場合は、 $t = \sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ を

$$t = k + \frac{1}{A + B(t-k) + C(t-k)^2 + (t-k)^3} \quad (3.6)$$

と置いて、 A, B, C を決定することで得られるものとする。これが $t^4 = k^4 + \alpha$ であるためには、

$$\alpha = 1, \quad A = 4k^3, \quad B = 6k^2, \quad C = 4k$$

でなくてはならない。これを、私たちは、

$$\sqrt[4]{k^4 + 1} \sim [k, \frac{1}{4k^3 + 6k^2(*) + 6k(*)^2 + (*)^3}]$$

と表す。そして $\sqrt[4]{k^4 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は、 $t_r = x_r/y_r$ と置くことで、

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 + 1 \\ 1 & k & k^2 & k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^3 \\ x_{r-1}^2 y_{r-1} \\ x_{r-1} y_{r-1}^2 \\ y_{r-1}^3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

となる．ペル方程式 $x^4 - Dy^4 = \pm 1$ を考えて，初期値を特に， $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．これを， $\sqrt[4]{k^4 + 1}$ のペル表現という．そして次が成り立つ．

命題 3. $\sqrt[4]{k^4 + 1}$ のペル表現(3.7)から得られる (x_r, y_r) は，4 次ペル方程式

$$x_r^4 - (k^4 + 1)y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 4, 16$ である．

証明 $u_r = x_r^4 - (k^4 + 1)y_r^4$ と置くと， $u_0 = -1$ ， $u_1 = 96k^8 + 16k^4 + 1$ ， $u_r = -u_{r-1}f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1})$ で， $f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) = 1 \pmod{p}$ であることから証明できる．（証明終）

（注意）実際には，

$$\begin{aligned} f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) &= x_{r-1}^8 + 4kx_{r-1}^7y_{r-1} + 10k^2x_{r-1}^6y_{r-1}^2 + 16k^3x_{r-1}^5y_{r-1}^3 + x_{r-1}^4y_{r-1}^4 + 20k^4x_{r-1}^4y_{r-1}^4 \\ &\quad + 4kx_{r-1}^3y_{r-1}^5 + 20k^5x_{r-1}^3y_{r-1}^5 + 4k^2x_{r-1}^2y_{r-1}^6 + 14k^6x_{r-1}^2y_{r-1}^6 \\ &\quad + 14k^6x_{r-1}^2y_{r-1}^6 + 4k^3x_{r-1}y_{r-1}^7 + 8k^7x_{r-1}y_{r-1}^7 + y_{r-1}^8 + 3k^4y_{r-1}^8 + 3k^8y_{r-1}^8 \end{aligned}$$

であり， $f_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) = 1 \pmod{p}$ を示すことは容易ではなかった．

以上から， $n \geq 5$ についても定理 2 が成り立つことが予想されるが，コンピュータで $n = 7$ のときまでその現象が起こることを確認している．

4. 周期 2 のフラクタル連分数とペル方程式について

4.1. 平方根の場合

$t = \sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 2 の場合の連分数とペル表現についても n 乗根の周期的な新しい連分数展開を睨んで考える． $\alpha = 2k$ と置いて，さらに，

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (t - k)}}$$

と置くと， $t^2 = k^2 + 2k$ が成り立つ． $t^2 = (k + 1)^2 - 1$ と考えると，

$$\sqrt{(k + 1)^2 - 1} = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + \dots}}}}$$

と周期 2 の正則連分数が得られる．これを，私たちは，

$$\sqrt{(k+1)^2 - 1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (*)}} \right]$$

と表す．ここで， $(*)$ は $\frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (*)}}$ が入れ子状になっていくことを意味する．

上の周期 2 の正則連分数により $\sqrt{(k+1)^2 - 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は，

$$t_r = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{2k + (t_{r-1} - k)}}$$

$t_r = x_r/y_r$ と置いて整理することで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 - 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

から得られる．ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ を考えて，初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

命題 4. $\sqrt{(k+1)^2 - 1}$ のペル表現 (4.1) から得られる (x_r, y_r) は，2 次ペル方程式

$$x_r^2 - \{(k+1)^2 - 1\}y_r^2 = \pm 1$$

の解である．

証明 $u_r = x_r^2 - \{(k+1)^2 - 1\}y_r^2$ と置くと， $u_0 = 1$ であり， $u_r = -u_{r-1}$ が成り立ことから示される．（証明終）

4.2. n 乗根の場合

$\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の周期 2 の正則フラクタル連分数に関しては， $t = \sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ を

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{A + B(t-k) + (t-k)^2}} \quad (4.2)$$

と置いて， A, B を決定することで得られるものとした．(4.2) を整理したものが， $t^3 = k^3 + \alpha$ となるためには，

$$\alpha = 3k^2 + 3k, \quad A = 3k^2 + 3k, \quad B = 3k + 1$$

でなくてはならないことがわかる．したがって，(4.2) は，

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{(3k^2 + 3k) + (3k + 1)(t-k) + (t-k)^2}} \quad (4.3)$$

と書ける． $t^3 = k^3 + 3k^2 + 3k = (k+1)^3 - 1$ に注意して，これを，私たちは，

$$\sqrt[3]{(k+1)^3-1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{(3k^2+3k) + (3k+1)(*) + (*)^2}} \right]$$

と表す．周期 2 の正則フラクタル連分数により， $\sqrt[3]{(k+1)^3-1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = x_r/y_r$ と置くことで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3-1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

となる．特に，初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．これを， $\sqrt[3]{(k+1)^3-1}$ のペル表現という．

命題 5. $\sqrt[3]{(k+1)^3-1}$ のペル表現(4.4)から得られる (x_r, y_r) は，3 次ペル方程式

$$x_r^3 - \{(k+1)^3-1\}y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 3, 9$ である．

証明 周期 1 のペル表現の k を $k+1$ に置き換えたものが周期 2 のペル表現となっているため，命題 4 より証明される．（証明終）

$t = \sqrt[4]{k^4+\alpha}$ の場合の周期 2 の正則フラクタル連分数についても，

$$t = k + \frac{1}{1 + \frac{1}{A+B(t-k)+C(t-k)^2+(t-k)^3}} \quad (4.5)$$

と置いて， A, B, C を決定することで得られるものとした．これが $t^4 = k^4 + \alpha$ であるためには，

$$\alpha = 4k^3 + 6k^2 + 6k, \quad A = 4k^3 + 6k^2 + 6k, \quad B = 6k^2 + 4k + 1, \quad C = 4k + 1$$

でなくてはならない． $t^4 = 4k^3 + 6k^2 + 6k = (k+1)^4 - 1$ に注意して，これを，私たちは，

$$\sqrt[4]{(k+1)^4-1} \sim \left[k, \frac{1}{1 + \frac{1}{(4k^3+6k^2+4k) + (6k^2+4k+1)(*) + (4k+1)(*)^2 + (*)^3}} \right]$$

と表す．そして $\sqrt[4]{(k+1)^4-1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = x_r/y_r$ と置くことで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & (k+1)^4-1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^3 \\ x_{r-1}^2 y_{r-1} \\ x_{r-1} y_{r-1}^2 \\ y_{r-1}^3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

となる．特に，初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．これを， $\sqrt[4]{(k+1)^4-1}$ のペル表現という．そして 3 乗根の場合と同様に，次が成り立つ．

命題 6. $\sqrt[4]{(k+1)^4-1}$ のペル表現(4.6)から得られる (x_r, y_r) は, 4 次ペル方程式

$$x_r^4 - \{(k+1)^4 - 1\}y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である. ここで, $p = 4, 16$ である.

以上から, 周期 1 の場合と同様に, $n \geq 5$ についても定理 2 が成り立つことが予想される. そして, コンピュータで $n = 7$ のときまでその現象が起こることを確認している.

4.3. 周期 3 のフラクタル連分数とペル方程式について

枚数制限の関係で, 周期 3 については簡単に紹介する. $t = \sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 3 の場合の連分数も n 乗根の周期的な新しい連分数展開を睨んで考える. しかし, n 乗根のフラクタル連分数を構築する立場から考えて, 私たちの研究では, n 乗根の拡張のためには, 周期 3 においては正則とすることはあきらめるしかなかった. この場合は, $\alpha = 2k + 2$ とし,

$$t = k + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2k + (x - k)}}}$$

と置いた. このとき, $t^2 = k^2 + \alpha$ が成り立つ. つまり, $t = \sqrt{(k+1)^2 + 1}$ を,

$$\sqrt{(k+1)^2 + 1} \sim \left[k, \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2k + (*)}}} \right]$$

と表すことにした.

上の, 周期 3 の連分数により $\sqrt{(k+1)^2 + 1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は, 周期 1 や 2 のときと同様に $t_r = x_r/y_r$ とおくことで,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 + 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

となる.

命題 7. $\sqrt{(k+1)^2 + 1}$ のペル表現(4.7)から得られる (x_r, y_r) は, 2 次ペル方程式

$$x_r^2 - \{(k+1)^2 + 1\}y_r^2 = \pm 1$$

の解である.

$\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の周期 3 のフラクタル連分数に関しては, $\alpha = 3k^2 + 3k + 2$ である. つまり, $k^3 + \alpha = (k+1)^3 + 1$ となる. そして, $\sqrt[3]{(k+1)^3 + 1}$ フラクタル連分数は,

$$\sqrt[3]{(k+1)^3 + 1} \sim \left[k, \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3k^2 + 3k + (3k+1)(*) + (*)^2}}} \right]$$

となる．さらに， $\sqrt[3]{(k+1)^3+1}$ 近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3+1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

となる．そして，次の命題が成り立つ．

命題 8. $\sqrt[3]{(k+1)^3+1}$ のペル表現(4.8)から得られる (x_r, y_r) は，3 次ペル方程式

$$x_r^3 - \{(k+1)^3+1\}y_r^3 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 3, 9$ である．

$\sqrt[4]{k^4+\alpha}$ の周期 3 のフラクタル連分数に関しては， $\alpha = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 2$ である．つまり， $k^4 + \alpha = (k+1)^4 + 1$ となる．そして， $\sqrt[4]{(k+1)^4+1}$ フラクタル連分数は，

$$\sqrt[4]{(k+1)^4+1} \sim \left[k, \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{(4k^3+6k^2+4k) + (6k^2+4k+1)(*) + (4k+1)(*)^2 + (*)^3}}} \right]$$

となる．さらに， $\sqrt[4]{(k+1)^4+1}$ の近似分数 x_r/y_r を得る行列表現は， $t_r = x_r/y_r$ と置くことで，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & (k+1)^4+1 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^3 \\ x_{r-1}^2 y_{r-1} \\ x_{r-1} y_{r-1}^2 \\ y_{r-1}^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となる．そして，次の命題が成り立つ．

命題 9. $\sqrt[4]{(k+1)^4+1}$ のペル表現(4.9)から得られる (x_r, y_r) は，4 次ペル方程式

$$x_r^4 - \{(k+1)^4+1\}y_r^4 = \pm 1 \pmod{p}$$

の解である．ここで， $p = 4, 16$ である．

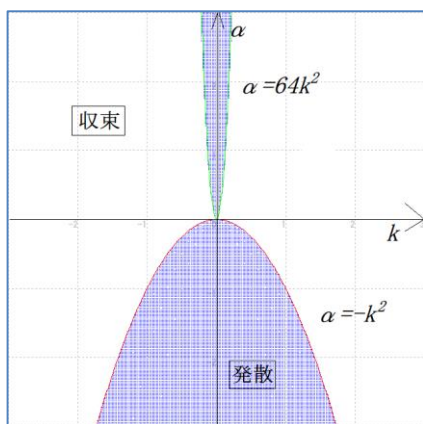
以上から， $n \geq 5$ についても命題 8 や命題 9 の拡張した命題が成り立つことを予想している．

5. ペル表現の収束と発散

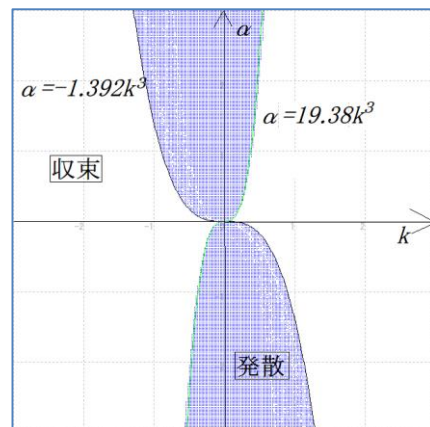
$\sqrt[n]{k^n+\alpha}$ の周期 1 のペル表現から得られる近似分数 x_r/y_r は，

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{n-1} & k^n + \alpha \\ 1 & k & k^2 & \cdots & k^{n-2} & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ x_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

で与えられた. 私たちは, k と α が自然数ではなく実数であったとしたら, $t_r = x_r/y_r$ の値はいつ収束するのかについて興味を覚え, それについて研究した. すなわち, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のペル表現から得られる近似小数 t_r を関数 $t_r = f_n(k, \alpha)$ と考え, t_r の発散と収束をもたらす領域 (k, α) はどのようなものであるかといった研究をコンピュータによる数値計算で行った.



(図 1) 周期 1 の $t_r = f_2(k, \alpha)$ の様子



(図 2) 周期 1 の $t_r = f_3(k, \alpha)$ の様子

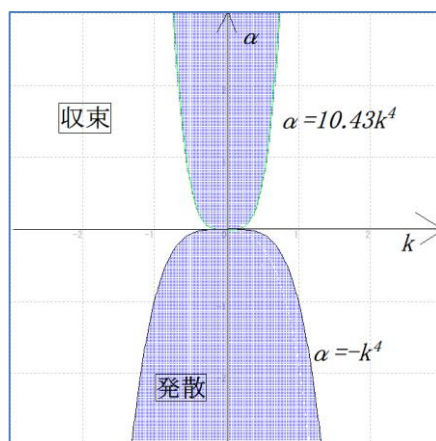
図 1 は $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現において, (k, α) の地点における t_r の収束と発散を示したもので, 網掛けが発散を表す. そして, 収束と発散の境界が, $\alpha = 64k^2$ と $\alpha = -k^2$ くらいではないかと考えている.

図 2 は $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現において, (k, α) の地点における t_r の収束と発散を示したものである. そして, 収束と発散の境界が, $\alpha = 19.38k^3$ と $\alpha = -1.392k^3$ くらいではないかと考えている.

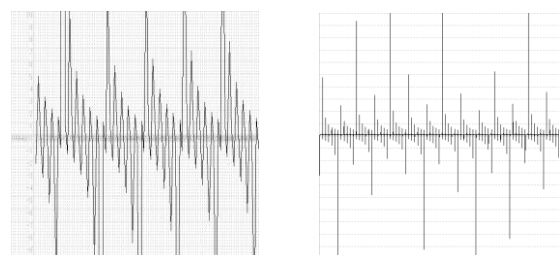
図 3 は $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ の周期 1 のペル表現において, (k, α) の地点における t_r の収束と発散を示したものである. そして, 収束と発散の境界が, $\alpha = 10.43k^4$ と $\alpha = -k^4$ くらいではないかと考えている.

いずれにせよ, 私達は, 発散と収束の境界線を与えるグラフの関数が, ある定数 A で $\alpha = Ak^n$ と書けるのではないかと考えている.

図 4 は $t_r = f_2(k, \alpha)$ の t_r の振動の状況である.



(図 3) 周期 1 の $t_r = f_4(k, \alpha)$ の様子



($k = 1, \alpha = -5$) ($k = -0.23, \alpha = -0.11$)
(図 4) 周期 1 の $t_r = f_2(k, \alpha)$ の振動グラフ

さて, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の周期 2 と 3 のペル表現から得られる近似分数 x_r/y_r は, 定理 3 の形から

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{n-1} & (k+1)^n + \alpha \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{n-2} & (k+1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} x_{r-1}^{n-2} \\ x_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。そうすると、 t_r の発散と収束をもたらす領域 (k, α) は、周期1の場合のグラフを k 方向に -1 だけ平行移動したものとなり、この研究は周期1の場合に帰着される。

5. 今後の方向性

連分数とペル方程式の理論は2次体の整数論という方向に発展した ([4]参照)。しかし現在、3次体やそれ以上の n 次体の整数論といった研究は進んでいないように思える。それはそれに対応する連分数の理論がないと考えられるため、私たちのフラクタル連分数がこのような体の理論に少しでも貢献できたという思いがある。また、連分数の理論はその周期性から単一ニューロンモデルに応用されている ([2]参照)。さらに、N.Oku, K.Aihara[3]には、私たちが数値計算によって得た振動グラフ(図4)の類似が多くあげられている。私たちのフラクタル連分数もニューロンモデルなどへ何らかの影響を与えられるのではないかと考えている。そのためにも一般に周期 T のフラクタル連分数の理論を私たちに完成させたいと考えている。

参考文献

- [1] Joseph H. Silverman 『A FRIENDLY INTRODUCTION TO NUMBER THEORY』 Pearson International Edition, (1997)
- [2] 畑政義 『神経回路モデルのカオス』 朝倉書店, (1998)
- [3] N.Oku, K.Aihara(2012) 『Numerical Analysis of Transient and Periodic Dynamics in Single and Coupled Nagumo-Sato Models』 International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.22, No.6, 1230021(2012)
- [4] 武隈良一 『2次体の整数論』 槇書店 (1972)