

研究内容

n 次ペル方程式の研究

津山工業高等専門学校

チーム名：津山高専Aチーム

代表者名：間庭早紀子

丸尾優佳(情報工学科 3 年)

間庭早紀子(情報工学科 3 年)

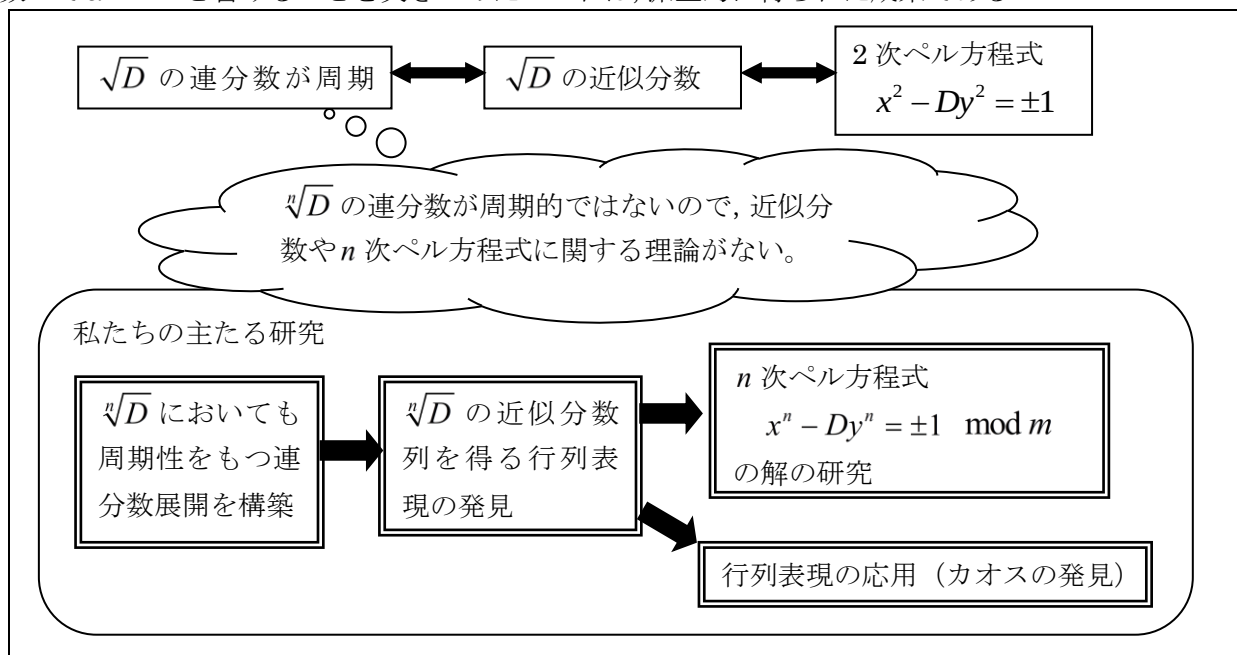
1. 研究の目的と概要

ペル方程式は連分数展開で解くことができるという定理がある．ペル方程式とは $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ (D は平方数でない自然数) という形の不定方程式である．私達の研究の主たる目的は, 今までまだ誰も成功していない $n \geq 3$ の n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ を解くための理論を構築することである．

昨年私達は, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ (k, α は任意の自然数で $0 < \alpha \leq k$) という形の n 乗根に関する連分数展開の新しい展開方法の構築をした．一般に, 平方根はこれまで知られている連分数展開で展開すると周期性を持つ．しかし, $n \geq 3$ のとき, n 乗根は従来の連分数展開では周期性を持たないことが証明されている．このため, $n \geq 3$ の n 乗根に関する理論がない．したがって私達は, 従来の連分数展開を捨て, n 乗根においても周期性(フラクタル性)を持つような新しいタイプの連分数展開を構成することを研究した．私達の考えた連分数展開の形では, n 乗根の連分数は n 次元的と見ることができるので, これを n 次フラクタル連分数と呼ぶことにした．更に, フラクタル連分数を応用すると, n 乗根の近似分数列が得られる行列表現(非線形ペル表現と呼んでいる)を発見することができた(JSEC2012 佳作受賞)．

さて, 2次ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解法は 1766 年に Lagrange が示したものが有名で, $\sqrt{D}$ の近似分数に係することが分かっている．したがって, 私達が発見した行列表現は n 次ペル方程式の解法に繋がると思い, 今年の新たな研究をスタートさせた．つまり, ペル方程式 $x^n - (k^n + \alpha)y^n = \pm 1$ の解は, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数が得られる行列表現を用いて導き出すことができるのではないかと考えたのである．2次ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ に関しては, k と α が特殊なケースに限るが, 私達の $\sqrt[k^2 + \alpha]$ の近似分数が得られる行列表現を使うと, Lagrange の方法より高速に解を見つけられることが成果である．しかし, n 次の場合はペル方程式の解の公式どころか解そのものが得られなかった．この理由は, 1995 年に Andrew John Wiles が証明した有名なフェルマーの最終定理に関係するのではないかと考えている(勿論, 証明はできていない)．そこで, 私達は n 次ペル方程式に関しては $\text{mod } m$ の世界での研究を行った．その結果, いくつかの有益な成果を得ることができた．

一方, 連分数とカオスに関する研究も多く見られることに興味を持ち, 私達の研究もカオスを睨んだものへと発展させることができると考えた．そこで, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の幾何学的考察として, コンピュータにより k と α を(自然数ではなく)実数のパラメータとして動かし, 私達の非線形ペル表現から出力される数列の発散と収束の様子を $k\alpha$ 座標平面に表示させるという研究を行った．その結果, 発散と収束の境界線を与える k と α のグラフの関数がある定数 A で $\alpha = Ak^n$ と書けることを突き止めた．これは, 派生的に得られた成果である．



(図 1: 研究の概観図)

図 1 は, 研究の概観図である．両矢印は互いに関係があることを示している．私達の研究が, 2 次ペル方程式から始まり n 次ペル方程式とカオスに至るまでの過程を表している．

2. 主結果

主結果を述べるには, 昨年の結果の知識が必要となるので, まずそれを述べる.

定理 1. n 乗根の連分数に関し, 従来とは異なる新しい連分数(フラクタル連分数)を構築した. より詳しく言えば,

$\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のフラクタル連分数を,

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} {}_n C_1 \cdot k^{n-1} \\ {}_n C_2 \cdot k^{n-2} \\ \vdots \\ {}_n C_{n-1} \cdot k \end{pmatrix} \right]^{[\alpha]}$$

と表記できる(詳細は § 3.1 で述べる).

定理 2. n 乗根に近似する分数列が得られる行列表現 (n 次非線形ペル表現と呼ぶ) を発見した. すなわち $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$

の一つの近似分数列 $\frac{x_r}{y_r}$ は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & \cdots & k^n + \alpha \\ 1 & k & \cdots & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2} y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1} y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる. ただし, 2 次の場合は線形ペル表現と呼ぶ(詳細は § 3.2 で述べる).

昨年得られた 2 つの定理を使って, 私達は以下の 6 つ主結果を得ることができた.

主結果 1. 平方根 $\sqrt{k^2 + \alpha}$ に関して, 線形ペル表現

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる (x_r, y_r) について,

$$x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$$

が成り立つ. 特に, $\alpha=1$ のとき (x_r, y_r) は, ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の全ての解である(詳細は § 4.1 で述べる).

主結果 2. u をある整数に固定し, $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の最小解を (a, b) とする. 更に, $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ の解の一つを (x_0, y_0) とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(k^2 + \alpha) \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

から得られる (x_n, y_n) は, ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ を満たす(詳細は § 4.1 で述べる).

主結果 3. m, n は 3 以上の自然数とする. $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の n 次の非線形ペル表現から得

られる (x_r, y_r) について, $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ は周期性を持つ(詳細は § 4.2 で述べる).

主結果 4. n 次非線形ペル表現から得られる n 次ペル関数 $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ について q と t を $q \geq n+1$, $t \geq 2$ の自然数とし, 更に $m = q^t$, $k = \delta q^{t-1} - 1$ ($1 \leq \delta \leq q-1$) とする. このとき, n 次非線形ペル表現の初期値を (k, k) とすると, 任意の (x_r, y_r) について,

$$u_r = \delta(q-n)q^{t-1} \text{ (一定)}$$

が成り立つ. 更に, (x_r, y_r) の周期は q で割り切れる (詳細は § 4.2 で述べる).

主結果 5. p を奇素数, k を整数とする. この時, p 次ペル方程式 $x^p - (k^p + 1)y^p = \pm 1$ について以下が成り立つ.

(1) $\pmod{p}$ における全ての解は, $0 \leq t \leq p-1$ である整数 t について,

$$x = \pm 1 + (k + \alpha)t, \quad y = t$$

である.

(2) ε を整数, $k = \varepsilon p^{m-1} - 1$ とすると, $\pmod{p^m}$ ($m \geq 2$) における全ての解は,

$$x = \delta p^{m-1} + 1, \quad y = t$$

である. ここで, δ は $0 \leq \delta \leq p-1$ の整数, $0 \leq t \leq p^m - 1$ である.

(詳細は § 4.2 で述べる).

主結果 6(予想). (1) n 次非線形ペル表現について, 実数 k, α に関する (x_r, y_r) の極限は, (k, α) により様子が異なる.

(2) (x_r, y_r) が r が大きくなるにつれ, 収束するときの (k, α) と発散するときの (k, α) の境界は, ある正の定数 A と負の定数 B で $\alpha = Ak^n$, または $\alpha = Bk^n$ と書ける. 特に, n が偶数のとき $B = -1$ である.

(発散とは収束しないという意味で, 詳細は § 5 で述べる).

3. フラクタル連分数に関する研究の紹介

3.1. フラクタル連分数について

前述した通り, $\sqrt{D}$ (ただし D は平方数でない自然数) は周期的な連分数になる. しかし, $\sqrt[n]{D}$ (ただし D は立方数でない自然数) の通常の連分数には周期性は見られないことが証明されている. そこで, 昨年私達は n 乗根 ($n \geq 3$) においても周期性を持つような連分数の構成に挑戦し, それに成功した.

まず, 私達は n 乗根の連分数展開を睨んで, $D = k^2 + \alpha$ とおき, $x = \sqrt{k^2 + \alpha}$ を $x = k + \frac{\alpha}{k+x}$ と変形した. この式から

$\sqrt{k^2 + \alpha}$ のフラクタル連分数が構築できる. すなわち, $\frac{\alpha}{k+x}$ の x に再び $k + \frac{\alpha}{k+x}$ を代入していくと,

$$\sqrt{k^2 + \alpha} = k + \frac{\alpha}{2k + \frac{\alpha}{2k + \dots}}$$

となる. 上の式から分かるように, 整数部は k , 分子は常に α , そして分母は $2k$ が周期 1 で続いていく. これを私達は,

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim \left[k, \left(\frac{\alpha}{2k} \right) \right]^{(\alpha)} \quad (3.1)$$

と表すことにした. ここで, $2k$ をフラクタル成分と呼ぶ. これは, 分母が常に $2k + 2k(*)$ という形でフラクタルに配置されているという意味である. また $[]$ の右上の (α) は連続する分子の数 α を表す. 表記 (3.1) を 1 次のフラク

タル連分数と呼ぶ.

一般に $\sqrt[n]{D}$ について $D=k^n+\alpha$ とおいて, $x=\sqrt[n]{k^n+\alpha}$ を,

$$x=k+\frac{\alpha}{k^{n-1}+k^{n-2}x+k^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}}$$

と変形する. $\sqrt{k^2+\alpha}$ のフラクタル連分数の構築方法と同様にしていけば, $\sqrt[n]{k^n+\alpha}$ に関するフラクタル連分数が得られる.

例えば, $\sqrt[3]{3}$ のフラクタル連分数は,私達の連分数展開を用いると,

$$\sqrt[3]{3}=1+\frac{2}{3+3\left[\frac{2}{3+3\left(\frac{2}{3\ldots}\right)+\left(\frac{2}{3\ldots}\right)^2}\right]+\left[\frac{2}{3+3\left(\frac{2}{3\ldots}\right)+\left(\frac{2}{3\ldots}\right)^2}\right]^2}$$

となり,これを私達の表記では,

$$\sqrt[3]{3}\sim\left[1,\left(\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right)\right]^{(2)}$$

と表す. 一般に,3 乗根,4 乗根,5 乗根のフラクタル連分数の表記は,

$$\sqrt[3]{k^3+\alpha}\sim\left[k,\left(\begin{smallmatrix}3k^2\\3k\end{smallmatrix}\right)\right]^{(\alpha)}\quad\sqrt[4]{k^4+\alpha}\sim\left[k,\left(\begin{smallmatrix}4k^3\\6k^2\\4k\end{smallmatrix}\right)\right]^{(\alpha)}\quad\sqrt[5]{k^5+\alpha}\sim\left[k,\left(\begin{smallmatrix}5k^4\\10k^3\\10k^2\\5k\end{smallmatrix}\right)\right]^{(\alpha)}$$

となる. ここで,フラクタル成分の $\left(\begin{smallmatrix}2k\\3k\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}4k^3\\6k^2\\4k\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}5k^4\\10k^3\\10k^2\\5k\end{smallmatrix}\right)$ の中の k^j の係数は,フラクタル成分はパスカルの三角

形(右図参照)と対応する.

			1			
		1	1			
	1	2	1			
	1	3	3	1		
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

以上のことから, $\sqrt[n]{k^n+\alpha}$ のフラクタル連分数の定理が得られた.

(図 3.1:パスカルの三角形)

(定理 1)

$\sqrt[n]{k^n+\alpha}$ のフラクタル連分数の表記は,

$$\sqrt[n]{k^n+\alpha}\sim\left[k,\left(\begin{smallmatrix}{}_nC_1\cdot k^{n-1}\\{}_nC_2\cdot k^{n-2}\\\vdots\\{}_nC_{n-1}\cdot k\end{smallmatrix}\right)\right]^{[\alpha]}$$

である.

3.2. 近似分数について

昨年のもう一つの結果を述べる. それは, n 次ペル方程式の解法に関係のある近似分数についてである. そして, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数を得る行列表現を, § 3.1 で述べたフラクタル連分数の理論を用いて構築した.

例えば, $\sqrt{2}$ の近似分数 $\frac{x_r}{y_r}$ を得る行列表現は, $t^2 = 2$ を変形した式 $t = 1 + \frac{1}{1+t}$ で $t = \frac{x_r}{y_r}$ とおいて整理すると,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

となる. 初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で計算すると, 近似分数列

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{x_r}{y_r}, \dots$$

が得られ, 計算を続ければ続けるほど $\sqrt{2}$ に近似していく. 同様にして, $\sqrt[3]{3}$ の場合, 近似分数 $\frac{x_r}{y_r}$ を得る行列表現は,

$t^3 = 3$ を変形した式 $t = 1 + \frac{2}{1+t+t^2}$ で $t = \frac{x_r}{y_r}$ とおいて整理すると,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^2 \\ x_{r-1}y_{r-1} \\ y_{r-1}^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となり, 初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で計算すると, 近似分数列

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{67}{49}, \dots, \frac{x_r}{y_r}, \dots$$

を得る. 一般に私達は, フラクタル連分数の構成法を応用して得られる行列表現から, $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の一つの近似分数列を得た.

(定理 2)

$\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の近似分数 $\frac{x_r}{y_r}$ は,

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & \dots & k^n + \alpha \\ 1 & k & \dots & k^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1}^{n-1} \\ x_{r-1}^{n-2}y_{r-1} \\ \vdots \\ x_{r-1}y_{r-1}^{n-2} \\ y_{r-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる. 上の表現を, $n=2$ のときは**線形ペル表現**, $n \geq 3$ については **n 次非線形ペル表現**と呼ぶ.

以上が, 昨年の研究の概要である.

4. 2 次ペル方程式の非線形ペル表現による解法

4.1. 2 次ペル方程式と線形ペル表現

§ 3 では, n 次ペル方程式と関連の深い連分数と近似分数についての昨年の結果を述べた. 以下からは, 今年度の私達の研究の第 1 の目的である n 次ペル方程式の解法を § 3 から得た結果を用いて研究していく. まず, 次の命題を紹介する.

命題 [Silvermam]

ペル方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ (D は平方数でない自然数) の最小解を (x_0, y_0) とすると, 全ての解 (x_n, y_n) は,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 D \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

から得られる.

〔証明〕 Silvermam[1] の Theorem 30.1 より言える.

私達は、2 次ペル方程式の解を研究するために、平方根 $\sqrt{k^2 + \alpha}$ に関する線形ペル表現 $\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}$, 初期値 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を使った. $\alpha=1$ の場合、線形ペル表現から得られる (x_r, y_r) は、実は上記の命題の (x_n, y_n) に全て一致しており、2 次ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の全ての解となることも分かった. しかし、 $\alpha \neq 1$ の場合は、残念ながら 2 次ペル方程式の解は線形ペル表現からは得られなかった. そこで、 $u_r = x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2$ とおいて、関数値 u_r の研究を行った. $\alpha=2$ のときを、(4.1)と同様に計算していくと、 k がどのような値をとっても関数値は $u_r = (-2)^{r-1}$ であった. $\alpha=3, \alpha=4$ の場合は、 $u_r = (-3)^{r-1}, u_r = (-4)^{r-1}$ となっていた. これらのことは一般的に証明でき、以下の結果を得た.

(主結果 1)

平方根 $\sqrt{k^2 + \alpha}$ に関して、線形ペル表現

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r-1} \\ y_{r-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から得られる (x_r, y_r) について、

$$x_r^2 - (k^2 + \alpha)y_r^2 = (-\alpha)^{r-1}$$

が成り立つ. 特に、 $\alpha=1$ のとき (x_r, y_r) は、ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の全ての解である.

上の定理から私達の研究の有用性は、 $u_r = \pm 1$ 以外にも拡張できたことにある. そこで、 u を ± 1 以外の整数として固定し、ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ の解の構造を研究した. コンピュータの計算から得られたデータを睨み、多くの議論の結果、解を高速に導き出す方法を見つけた.

例えば、 $k=2, \alpha=3 (k^2 + \alpha=7), u_r=9$ のときの $x^2 - 7y^2 = 9$ の解について説明しよう. まず、 $a^2 - 7b^2 = \pm 1$ の初期値 $(a, b) = (8, 3)$ と $x^2 - 7y^2 = 9$ の解の一つ、例えば $(4, 1)$ が見つかったとする. そのとき、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \times 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{初期値} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を使うと、次々と

$$(x, y) = (53, 20), (844, 319), (13451, 5084), \dots$$

と $x^2 - 7y^2 = 9$ の解が次々と得られるのである. これは、Silverman[1]で示されている上記の命題に類似した結果で、一般に次のようにまとめることができた.

(主結果 2)

u をある整数に固定し、 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = \pm 1$ の最小解を (a, b) とする. 更に、 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ の解の一つを

(x_0, y_0) とおくと、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(k^2 + \alpha) \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

から得られる (x_n, y_n) は、ペル方程式 $x^2 - (k^2 + \alpha)y^2 = u$ を満たす.

ただし、主結果 2 は全ての解を求める公式ではないことを注意しておく.

4.2. 3 次以上のペル方程式について

コンピュータを使った数値計算から、 $n \geq 3$ のときの n 次ペル方程式 $x^n - Dy^n = \pm 1$ (D は任意の自然数) については、全く解は得られなかった。この理由として、有名なフェルマーの最終定理が関係しているのではないかと考えている。フェルマーの最終定理とは、 $n \geq 3$ の自然数 n について、 $x^n + y^n = z^n$ となる 0 でない自然数 (x, y, z) の組が存在しない、という定理のことである。つまり、 $n \geq 3$ のときの n 次ペル関数 $x^n - Dy^n = (-\alpha)^{n-1}$ についても、同じように解は存在しないことが言えるのではないかと思っている。そこで、私達は $\text{mod } m$ の世界で研究を行った。まず、周期性に関する以下の結果を得た。

(主結果 3)

m, n は 3 以上の自然数とする。 $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する n 次非線形ペル表現から得られる (x_r, y_r) について、

$$u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m} \text{ は周期性を持つ.}$$

〈証明〉鳩ノ巣原理を用いて証明できる。

さて、私達が発見した非線形ペル表現は、 $n \geq 3$ のときの n 次ペル方程式 $x_r^n - x(k^n + \alpha)y_r^n = \pm 1 \pmod{m}$ にどのように影響を与えているかが問題である。これを考えるために、 $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ として (x_r, y_r) の関数 u_r がどのような値を取るかを調査した。つまり、私達の狙いは u_r が $\pm C$ (C は定数) に等しくなるときの条件を探ることだった。そして、多くの数値計算から得られたデータから、私達は m と k の関係性に着目した。例えば、3 次ペル関数のとき、 q を自然数、 $t \geq 4$ 、 $m = q^t$ 、 $k = q^{t-1} - 1$ とすると、 u_r が $(q-3)q^{t-1}$ という一定の値になることを発見した。その後、私達はこれを一般化し、次の主結果を得た。

(主結果 4)

n 次非線形ペル表現から得られる n 次ペル関数 $u_r = x_r^n - (k^n + \alpha)y_r^n \pmod{m}$ について q と t を $q \geq n+1, t \geq 2$ の自然数とし、更に $m = q^t$ 、 $k = \delta q^{t-1} - 1$ ($1 \leq \delta \leq q-1$) とする。このとき、 n 次非線形ペル表現の初期値を (k, k) とすると、任意の (x_r, y_r) について、

$$u_r = \delta(q-n)q^{t-1} \text{ (一定)}$$

が成り立つ。更に、 (x_r, y_r) の周期は q で割り切れる。

3 次と 5 次ペル関数に関する例を、表 4.1-4.2 に示す。

(表 4.1: $t=2, 3$ $q=3, 4, 5, 6$)

n	t	q	δ	u_r
3	2	3	1	0
		4	1	4
		5	1	10
		6	1	18
	3	3	1	0
		4	1	16
		5	1	50
		6	1	108

(4.2: $t=2, 3$ $q=5, 6, 7, 8$)

n	t	q	δ	u_r
5	2	5	1	0
		6	1	6
		7	1	14
		8	1	24
	3	5	1	0
		6	1	36
		7	1	98
		8	1	192

主結果 4 から注目した条件は, $m=q^t, k=\delta q^{t-1}-1$ である. そして, 非線形ペル表現を使ったこの研究が, より一般的な研究へと繋がった. それを述べる前に, まず, 有名なフェルマーの小定理と初等整数論講義(高木)に載っている既知の結果を挙げよう.

(定理)[フェルマーの小定理]

r は 0 でない整数, p を素数とすると,

$$r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

(定理)[高木]

p を奇素数, m を自然数, φ を p^m のオイラー数とすると, $r^\varphi \equiv 1 \pmod{p^m}$ となる自然数 r が存在して, p^m と互いに素な数は,

$$1, r, r^2, \dots, r^{\varphi-1}$$

となる. ここで, $\varphi = p^{m-1}(p-1)$ である.

以上の定理と命題から, 私達は次の主結果を得ることができた.

(主結果 5)

p を奇素数, k を整数とする. この時, p 次ペル方程式 $x^p - (k^p + 1)y^p = \pm 1$ について, 以下が成り立つ.

(1) $\pmod{p}$ における全ての解は, $0 \leq t \leq p-1$ である整数 t について,

$$x = \pm 1 + (k + \alpha)t, \quad y = t$$

である.

(2) $k = \varepsilon p^{m-1} - 1$ とすると, $\pmod{p^m}$ ($m \geq 2$) における全ての解は,

$$x = \delta p^{m-1} \pm 1, \quad y = t$$

である. ここで, δ は $0 \leq \delta \leq p-1$ の整数, $0 \leq t \leq p^m - 1$ の整数である.

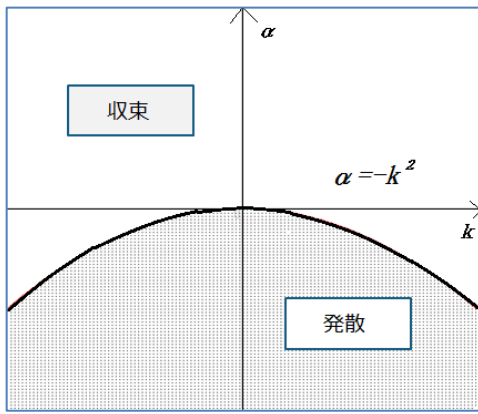
(証明) (1) フェルマーの小定理から得られる.

(2) $k^p \equiv (\varepsilon q^{m-1} - 1)^p \equiv +1 \pmod{p^m}$ より, p 次ペル方程式 $x^p - (k^p + 1)y^p \equiv 1 \pmod{p^m}$ は, $x^p \equiv 1 \pmod{p^m}$ となる. したがって, 定理[高木]より, $x_0 = r^{p^{m-1}}$ が解となり, ちょうど $x_0, x_0^1, \dots, x_0^{p-1}$ の p 個の解を持つ. より具体的には $x = \delta p^{m-1} + 1$ であることも分かる. $x^p - (k^p + 1)y^p \equiv -1 \pmod{p^m}$ についても, 同様に表すことができる(証明終).

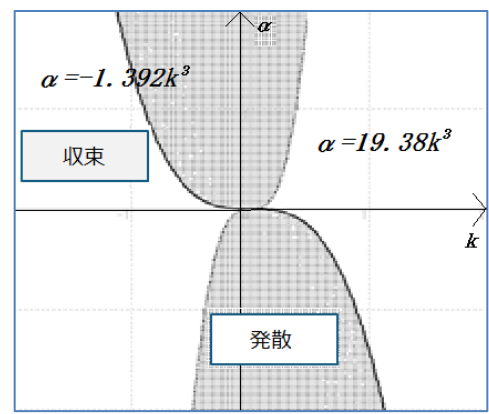
ところで, 私達の研究からは, 上の主結果 5 の(2)に関して, p を偶数で考えても類似の結果が得られている. この場合は, $x^p - (k^p + 1)y^p \equiv 1 \pmod{p^m}$ の解のみとなるが, 全ての解となるかどうかについては, まだ分かっていない.

5. 連分数とカオスとの関連

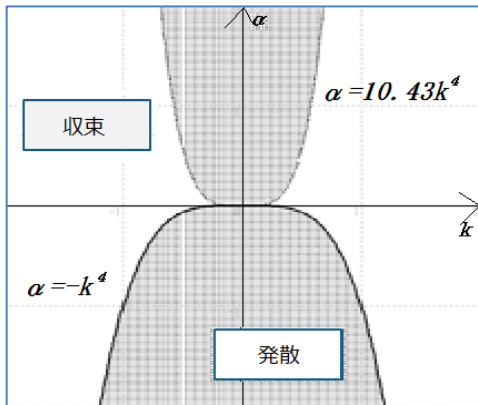
§ 3.2 において, $\sqrt[n]{D}$ の近似分数に関し, 私達は n 次非線形ペル表現を得た. これまでの議論から, D が自然数であれば n 次非線形表現から得られる数値は次第に $\sqrt[n]{D}$ に近似していく. しかし D が非整数の実数であれば, 非線形ペル表現が与える値はどういう意味を持つか, コンピュータによる数値的研究を行った. その結果, 各 (k, α) に対して n 次非線形ペル表現から得られる (x_r, y_r) の値は, ステップが大きくなるにつれ発散するか収束するかどちらかの現象が起こった. そして私達は, 発散と収束の境界線を与えるグラフの関数が, ある定数 A で $\alpha = Ak^n$ と書けることを突き止めた.



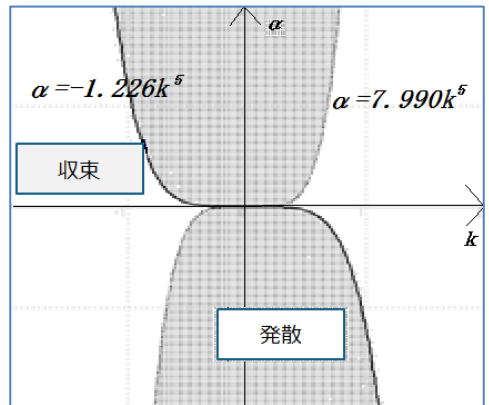
(図 5.1: $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)



(図 5.2: $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)



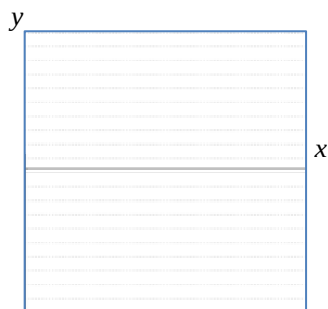
(図 5.3: $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)



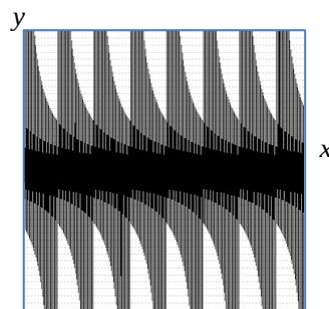
(図 5.4: $\sqrt[5]{k^5 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフ)

上記の図 5.1-5.4 は、 $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の α と k を使い、 $k\alpha$ 座標平面上における n 次非線形ペル表現から得られる数列 (x_r, y_r) の発散・収束の様子を表したグラフである(発散は振動も含める)。縦軸を α 、横軸を k とし、色のついていない範囲が収束する領域、色のついた範囲が収束しない領域となっている。その境界線を、細線と太線で表す。私達の研究では、境界を $\alpha = Ak^n$ とすると、 $n=2$ のときは $A=-1$ 、 $n=3$ のときは $A \doteq -1.392, 19.38$ 、 $n=4$ のときは $A \doteq -1, 10.43$ 、 $n=5$ のときは $A \doteq -1.226, 7.990$ という近似値の結果を得た。特に、平方根と 4 乗根、すなわち n が偶数のときの定数 A に注目すると、負の領域では $A=-1$ となっていることを確信している。しかし、これ以上の具体的な結論は得られなかった。

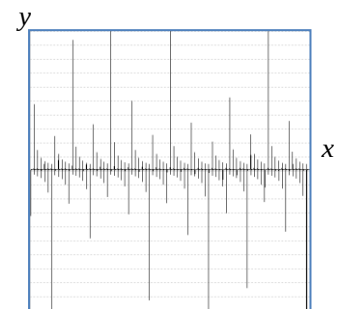
グラフの発散領域の具体的様子の一例を以下に示す。図 5.5 は、図 5.1 における $\sqrt{k^2 + \alpha}$ のペル表現から得られるグラフの $k=-0.62, \alpha=-0.864$ 地点の収束の様子であり、図 5.6 は、 $k=0.44, \alpha=-0.44$ 地点、図 5.7 は、 $k=0.44, \alpha=-0.44$ 地点での発散の様子である。発散のグラフは、 (k, α) の値により異なることも特徴であった。



(図 5.5: $k = -0.62, \alpha = -0.864$)



(図 5.6: $k = 0.44, \alpha = -0.44$)



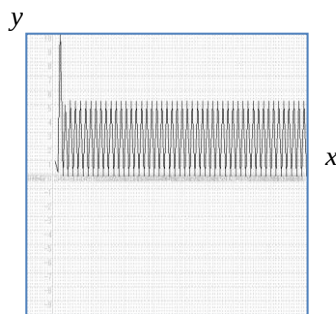
(図 5.7: $k = -0.23, \alpha = -0.1191$)

(主結果 6(予想))

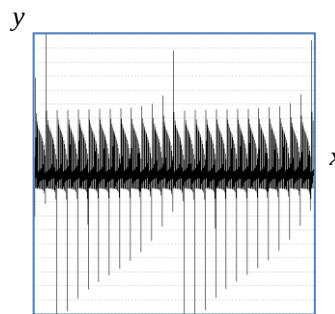
- (1) n 次非線形ペル表現について, 実数 k, α に関する (x_r, y_r) の極限は, (k, α) により様子が異なる.
- (2) (x_r, y_r) が r が大きくなるにつれ, 収束するときの (k, α) と発散するときの (k, α) の境界は, ある正の定数 A と負の定数 B で $\alpha = Ak^n$, または $\alpha = Bk^n$ と書ける. 特に, n が偶数のとき $B = -1$ である.

6. 今後の方針

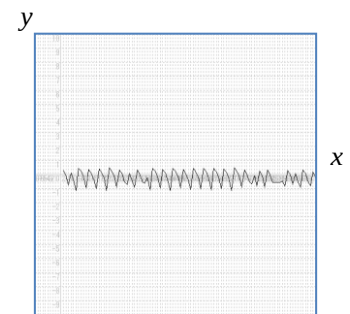
N.Oku, K.Aihara の論文『Numerical Analysis of Transient and Periodic Dynamics in Single and Coupled Nagumo-Sato Models』では, 単一のニューロンモデルに関するカオス理論が扱われている. 驚くべきことに, この論文の中にある周期的なアトラクターのグラフの多くが, 私達の研究から得られたグラフと非常に類似している. つまり, 私達の考えた理論は, ニューロンモデルへの応用があるのではないかと考えている. §5 で述べた振動のグラフで, 上の論文と類似の波形の例を下に挙げる.



(図 6.1: $k = -0.12, \alpha = 0.216$)



(図 6.2: $k = -0.99, \alpha = -1$)



(図 6.3: $k = 0.536, \alpha = -0.096$)

図 6.1 は 3 次非線形ペル表現, 図 6.2 は 4 次非線形ペル表現, 図 6.3 は 5 次非線形ペル表現における各地点 (k, α) における発散の様子である.

7. 参考文献

- [1] Joseph H. Silverman 『A FRIENDLY INTRODUCTION TO NUMBER THEORY』 Pearson International Edition, (1997)
- [2] 高木貞治 『初等整数論講義 第 2 版』 共立出版株式会社, (1971)
- [3] N.Oku, K.Aihara (2012) 『Numerical Analysis of Transient and Periodic Dynamics in Single and Coupled Nagumo-Sato Models』 International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.22, No.6, 1230021 (2012)
- [4] 「ペル方程式 -wikipedia」
< <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9A%E3%83%AB%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F> >
(2013/4/18)