

連分数を拡張させたフラクタル連分数に関する研究

丸尾優佳（津山高専 情報工学科 2 年）

間庭早紀子（津山高専 情報工学科 2 年）

アブストラクト

フラクタル連分数は私たちが考えた概念である。従来の平方根に関する連分数は同じ数の列が周期的に現れることから、それはフラクタル性を持つと考える事ができる。しかし、3 乗根や 4 乗根を従来の連分数で考えても、フラクタル性（周期性）を見つけないことができる。私たちは、従来の連分数表示を捨て、 n 乗根においてフラクタル性をもつような新しいタイプの連分数の理論を構築することに成功した。

1. 研究の動機

$\sqrt[n]{n}$ は周期的な連分数に展開されることが知られている。例えば、 $\sqrt{2}$ については、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

であり、無理数であるはずの $\sqrt{2}$ に規則性が生まれる。しかし、 $\sqrt[3]{k}$ は上の意味で連分数展開可能であるが、周期的ではない。例えば、 $\sqrt[3]{2}$ については、

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \dots}}}$$

であり、分母にあらわれる左端の数列 1, 3, 1, 5, ... に周期性を見つけないことができる。しかし、従来の枠にとらわれない連分数展開を考え、その中で周期性をつくることできないかという思いに至った。

2. 今回の研究の主結果

まず、フラクタル連分数に関する結果について説明する。よく知られているように $\sqrt{2}$ の連分数展開は、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

である。すなわち、分母が常に $2 + (*)$ という形で繰り返される。これを私たちは、

$$\sqrt{2} \sim [1, 2]^{(1)}$$

と表すことにした。ここで、2 を **フラクタル成分** と呼ぶ。また $[]$ の右上の (1) は連続する分子の数 1

を表す。そして、一般化のためにこの連分数を**1次のフラクタル連分数**と呼ぶことにする。

平方数の1次のフラクタル連分数の一般式は、

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim \left[k, \overset{\cdot}{2k} \right]^{(\alpha)}$$

となる。これらは周期1である。

私たちは、平方数のフラクタル連分数の構成法をヒントに $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ のフラクタル性を持つ連分数を得ることができた。例えば $\sqrt[3]{2}$ は、

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + 3 \left[\frac{1}{3 + 3 \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right] + \left[\frac{1}{3 + 3 \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right]^2}$$

となる。上式にあるように分母が常に $3 + 3(*) + (*)^2$ という形で繰り返されるため、

$$\sqrt[3]{2} \sim \left[1, \left(\overset{\cdot}{3} \right) \right]^{(1)}$$

と書く（詳細は後述する）。そして $\left(\overset{\cdot}{3} \right)$ を**フラクタル成分**と言い、このように構成された連分数を**2次のフラクタル連分数**と呼ぶ。一般に $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の2次のフラクタル連分数は、

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[k, \left(\overset{\cdot}{3k^2} \right) \right]^{(\alpha)}$$

である。より一般の $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の $n-1$ 次のフラクタル連分数については3.5の**定理1**で詳細に扱い、これを証明する。

次に、非線形ペル数列表現に関する結果について説明する。研究の切っ掛けは、 $\sqrt{k}$ とペル数列との関係性にあった。例えば、 $\sqrt{2}$ の近似分数列は、

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

であり、 $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ というペル数列になっている。これを行列で表現すると、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。一般に $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

である。式(2.1)を $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の**近似分数ペル表現**という。

これをヒントに $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数を考察した。その結果、 $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^2 + \alpha \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} a_{n-2} \\ a_{n-1} b_{n-2} \\ b_{n-1} b_{n-2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

となり、式(2.2)は $\sqrt{k}$ の近似分数表現(2.1)の一般化となっている。表現の形から私たちはこれを、

$\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現と呼ぶことにした。 $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ の非線形ペル表現は 4.2 節で詳細に扱う。

3.1. 平方根の連分数の再考察

今回の私たちの研究は、 n 乗根のフラクタル連分数を構築することである。

まず、知られている $\sqrt{k}$ の連分数を再考察する。 $\sqrt{2}$ を例として考えてみる。連分数展開するために $\sqrt{2}$ を生成する式を $x^2 - 1 = 1$ とする。さらに変形して、

$$(x-1)(x+1) = 1 \Rightarrow x-1 = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

となる。最後の式から $\sqrt{2}$ の1次のフラクタル連分数が構成できる。すなわち、 $\frac{1}{1+x}$ の x に再び $1 + \frac{1}{1+x}$ を代入していくと、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

となる。上式からわかるように、整数部は1、分母は2が周期1で続いていく。これを、

$$\sqrt{2} \sim [1, \dot{2}]^{(1)}$$

と表す。以上のことから、 $\sqrt{2}$ の次数1のフラクタル連分数を得た。ここで、 $1 + \frac{1}{1+x}$ を $\sqrt{2}$ の連分数の生成式と呼ぶことにする。

さて、 $\sqrt{2}$ の連分数の生成式 $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ の式 $\frac{1}{1+x}$ に注目した。この式 $\frac{1}{1+x}$ は、黄金比 $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (φ は $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ を満たす唯一の正の解)の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1+\varphi}$ と同一のものである。黄金比 $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は、

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

というフラクタル連分数をもち、分母の1が周期することが特徴である。これをヒントに $\sqrt{k^2 + \alpha}$ の連分数展開を構成し直す。ただし、 α は0より大きく、 k より小さい数である。

$x^2 = k^2 + \alpha$ の連分数展開の生成式を $x = k + \frac{\alpha}{k+x}$ とする。 x を $k + \frac{\alpha}{k+x}$ に置き換える。この操作を繰り返して1次のフラクタル連分数が得られる。例えば、

$$\sqrt{2} \sim [1, \dot{2}]^{(1)}, \quad \sqrt{3} \sim [1, \dot{2}]^{(2)}, \quad \sqrt{5} \sim [2, \dot{4}]^{(1)}, \quad \sqrt{8} \sim [2, \dot{4}]^{(4)}$$

である。そして、1次のフラクタル連分数の一般式は、

$$\sqrt{k^2 + \alpha} \sim \left[k, \overset{\cdot}{2k} \right]^{(\alpha)}$$

となり、これらは周期 1 である。

3.2. 3 乗根のフラクタル連分数の構築

前節 3.1 の $\sqrt{A}$ の連分数の方法をヒントに、3 乗根も 3 次の超黄金比と関係があるのではないかと考えた。3 次の超黄金比 φ とは、 $\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ の唯一の正の解のことであり、これより φ の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1+\varphi+\varphi^2}$ を得る。そして、

$$\varphi = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\dots}\right) + \left(1 + \frac{1}{1+\dots}\right)^2}$$

となる。この式を基本にして新しい連分数展開を構成できないかと考えた。 $\sqrt[3]{2}$ で考えてみよう。 $\sqrt[3]{2}$ の連分数の生成式を $x = 1 + \frac{1}{1+x+x^2}$ と考えると、これは φ の連分数の生成式と関係があることが分かる。

$\sqrt[3]{2}$ の連分数の生成式から、 $\sqrt[3]{2}$ の連分数を計算すると次の式を得る。

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3 + 3 \left[\frac{1}{3+3\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2} \right] + \left[\frac{1}{3+3\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2} \right]^2}$$

上式にあるように $3 + 3$ はフラクタルに配置されているため、これを私たちは、

$$\sqrt[3]{2} \sim \left[1, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}} \right]^{(1)}$$

と書き、 $\sqrt[3]{2}$ の **2 次のフラクタル連分数** と呼ぶことにした。同様に計算していくと、

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3} &\sim \left[1, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}} \right]^{(2)}, & \sqrt[3]{9} &\sim \left[2, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}} \right]^{(1)}, & \sqrt[3]{20} &\sim \left[2, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}} \right]^{(12)} \\ \sqrt[3]{28} &\sim \left[3, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 27 \\ 9 \end{pmatrix}} \right]^{(1)}, & \sqrt[3]{43} &\sim \left[3, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 27 \\ 9 \end{pmatrix}} \right]^{(16)}, & \sqrt[3]{65} &\sim \left[4, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 48 \\ 12 \end{pmatrix}} \right]^{(1)} \end{aligned}$$

が得られた。上の式から分かるように、2 次のフラクタル連分数の一般式は、

$$\sqrt[3]{k^3 + \alpha} \sim \left[n, \overset{\cdot}{\begin{pmatrix} 3k^2 \\ 3k \end{pmatrix}} \right]^{(\alpha)}$$

であり、周期 1 である。

3.3. n 乗根のフラクタル連分数について

次に、 n 乗根の連分数を構築していこう。 n 乗根も平方根、3乗根と同じように n 次の超黄金比との関係を持つ。 n 次の超黄金比とは、 $\varphi^n + \varphi^{n-1} + \dots + \varphi - 1 = 0$ の唯一の正の解のことである。そして

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \varphi + \dots + \varphi^{n-1}}$$

を φ のフラクタル連分数の生成式とする。そして $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ のフラクタル連分数の生成式を、

$$x = k + \frac{\alpha}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}}$$

と考える。このことから、私たちは $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する $n-1$ 次のフラクタル連分数を構築することができた。例えば4乗根と5乗根のフラクタル連分数は、

$$\sqrt[4]{k^4 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} \dot{4}k^3 \\ 6k^2 \\ 4k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)}, \quad \sqrt[5]{k^5 + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} \dot{5}k^4 \\ 10k^3 \\ 10k^2 \\ 5k \end{pmatrix} \right]^{(\alpha)}$$

である。

3.4 $n-1$ 次のフラクタル連分数とパスカル三角形との関係

これまでの研究から、 $n-1$ 次のフラクタル連分数はパスカルの三角形と関係があることが理解で

きる。フラクタル連分数表示から分かるように、フラクタル成分の $\begin{pmatrix} \dot{2}k \\ 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{3}k^2 \\ 3k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{4}k^3 \\ 6k^2 \\ 4k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{5}k^4 \\ 10k^3 \\ 10k^2 \\ 5k \end{pmatrix}$ の中

の k^α の係数が $\begin{pmatrix} \dot{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{4} \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{5} \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ となっているのである。

パスカルの三角形

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

以上のことから私たちは、以下の定理を証明することができた。

定理 1. $\sqrt[n]{k^n + \alpha}$ に関する $n-1$ 次のフラクタル連分数は、

$$\sqrt[n]{k^n + \alpha} \sim \left[k, \begin{pmatrix} \cdot \\ {}_n C_1 \cdot k^{n-1} \\ {}_n C_2 \cdot k^{n-2} \\ \vdots \\ {}_n C_{n-1} \cdot k \end{pmatrix} \right]^{[\alpha]}$$

である。

(証明) $\omega = \sqrt[n]{k^n + \alpha} - k$ とおくと、 $(\omega + k)^n = k^n + \alpha$ となる。左辺を二項展開して、

$$\begin{aligned} & \omega^n + {}_n C_{n-1} k \omega^{n-1} + \cdots + {}_n C_1 k^{n-1} \omega + k^n = k^n + \alpha \\ \Rightarrow & \omega^n + {}_n C_{n-1} k \omega^{n-1} + \cdots + {}_n C_1 k^{n-1} \omega = \alpha \\ \Rightarrow & \omega (\omega^{n-1} + {}_n C_{n-1} k \omega^{n-2} + \cdots + {}_n C_1 k^{n-1}) = \alpha \\ \Rightarrow & \omega = \frac{\alpha}{{}_n C_1 k^{n-1} + {}_n C_2 k^{n-2} \omega + \cdots + {}_n C_{n-1} k \omega^{n-2} + \omega^{n-1}} \end{aligned}$$

よって、定理 1 は証明された。(証明終)

4.1. 平方根の近似分数表現

以後、 $\sqrt[n]{A}$ の近似分数を考察する。 n 次の超黄金数 φ が n ・フィボナッチ数列の分数列で近似しているという事実がある。このことを念頭に研究を進めた。

まず、黄金比 φ を考える。 φ の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1+\varphi}$ より漸化式

$$\varphi_n = \frac{1}{1 + \varphi_{n-1}}$$

を作る。これより近似分数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

を得る。この分数列は、フィボナッチ数列(1,1,2,3,5,...)から得られたものになっている。これを近似分数表現にすると、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{近似分数表現})$$

となる。私たちはこの行列表現に注目して研究を行った。

$\sqrt{2}$ の場合を考えてみる。 $\sqrt{2}$ の連分数の生成式 $x = 1 + \frac{1}{1+x}$ より、漸化式

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}}$$

を考える。ここで、初期値を $x_0 = 0$ とし、順次計算していくと、

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1+0} = \frac{2}{1}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1+2} = \frac{4}{3}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = \frac{10}{7}, \quad \dots$$

となり、その近似分数列は、

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

となる。近似分数表現に直すために a_n と b_n について解くと、

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{b_{n-1}}} = 1 + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

という近似分数表現を得る。これを $\sqrt{2}$ の**近似分数ペル表現**という。

$\sqrt{2}$ の近似分数について精度を調べてみた。

$\sqrt{2}$ の近似分数表

n	1	2	3	...	10
$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{7}$	...	$\frac{4756}{3363}$
精度 [小数点第 k 位]	0	0	1	...	6

更に調査した結果、 n 番目の分数についての精度は少数点第 $\frac{n}{2}$ 位くらいまでである。

同様に、 $\sqrt{5}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{10}$ の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

となった。これらの n 番目の分数についての精度も少数点第 $\frac{n}{2}$ 位くらいまでである。一般に、 $\sqrt{k^2 + \alpha}$

の近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 + \alpha \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

であることが分かった。以上見てきたように近似分数表現の精度はそれ程良くはないが、行列表現

を持つという点が特徴である。

4.2. 3乗根の近似分数表現

3乗根の近似分数表現を構成していく。

まず、私たちはニュートン法を使って連分数を作る研究があることを知った。「ニュートン法から得られる平方根、立方根、4乗根の連分数表示」(堀口俊二、鈴木武雄. 新潟産業大学経済学部. 2012)によると、 $\sqrt[3]{\alpha}$ の生成式を、

$$x = 1 - \frac{2}{x + 2 + \frac{\alpha n}{\frac{2x^n - \alpha nx^2 + \alpha(n-2)}{x^3 + 2x^2 + x}}}$$

と考えると、近似分数列を作っていくものである。しかし、この式は複雑なため私たちは不満を持った。以下に、私たちが独自に考案し構築した $\sqrt[3]{k}$ の連分数展開から、近似分数の行列表現を研究する。

まず、黄金比 φ の近似分数を復習する。 φ の連分数の生成式 $\varphi = \frac{1}{1 + \varphi_3 + \varphi_3^2}$ から漸化式

$$\varphi_n = \frac{1}{1 + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\varphi_{n-2}}$$

を作る。これより、

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{13}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

を得る。この分数列は、3・フィボナッチ数列(1,1,2,4,7,13...)から得られたものになっている。そして、近似分数表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{pmatrix}$$

となる。

$\sqrt[3]{2}$ の場合を考える。 $\sqrt[3]{2}$ の連分数の生成式 $x = 1 + \frac{1}{1+x+x^2}$ から、漸化式

$$x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2}}$$

を作る。ここで、 $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ とおき、順次計算していくと、

$$x_2 = \frac{1}{1+(0+1)+(0+1)(0+1)} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{1+(\frac{1}{3}+1)+(\frac{1}{3}+1)(0+1)} = \frac{3}{9}, \quad \dots\dots$$

となり、近似分数列

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{9}, \frac{66}{39}, \frac{9972}{8451}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots \quad (\text{近似分数表現})$$

を得る。

$\sqrt[3]{2}$ の近似分数表

n	1	2	3	4	...	9
$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{66}{39}$	$\frac{9972}{8451}$	...	略
精度 [小数点第 j 位]	0	0	1	1	...	4

これらの n 番目の分数についての精度も少数点第 $\frac{n}{2}$ 位くらいまでであった。 a_n と b_n について解くと、

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{b_{n-1}b_{n-2}}} = 1 + \frac{b_{n-1}b_{n-2}}{b_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}} \\ &= \frac{2b_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}}{b_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2}}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

という近似分数表現を得た。これを私たちは $\sqrt[3]{2}$ の **近似分数非線形ペル表現** と呼ぶことにした。

同様に計算すると、例えば $\sqrt[3]{9}$ の近似分数非線形ペル表現は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

であり、 $\sqrt[3]{30}$ の近似分数非線形ペル表現は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 30 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

となる。一般に、 $\sqrt[3]{k^3 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^2 + \alpha \\ 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2} \\ a_{n-1}b_{n-2} \\ b_{n-1}b_{n-2} \end{pmatrix}$$

であることが分かった。

4.3. n 乗根の近似分数非線形ペル表現

同様に、 $\sqrt[4]{k^4 + \alpha}$ と $\sqrt[5]{k^5 + \alpha}$ を研究した結果、次の公式を得た。

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}b_{n-4} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4} \end{pmatrix}$$

これらの結果から、より一般的な近似分数非線形ペル表現を推測することは簡単である。例えば、 $\sqrt[6]{k^6 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 & k^6 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}b_{n-5} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5} \end{pmatrix}$$

$\sqrt[7]{k^7 + \alpha}$ の近似分数非線形ペル表現は、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 & k^6 & k^7 + \alpha \\ 1 & k & k^2 & k^3 & k^4 & k^5 & k^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5}a_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}a_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}a_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ a_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \\ b_{n-1}b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}b_{n-6} \end{pmatrix}$$

である。

5. 今後の方針

今回は周期 1 のフラクタル連分数を研究し、 n 乗根の周期 1 の連分数の拡張としてフラクタル連分数を構築することに成功した。しかし、平方根に関しては正則連分数においても周期性を持つ。すなわち、分子を常に 1 として連分数を構成しても周期性がある。

平方数の連分数についてはペル方程式の解法と関係が深い、そのため近似分数ペル表現という言葉を使用した。私たちが発見した近似分数非線形ペル表現もなんらかの方程式の解法に関係があると考えている。