

Kーパスカル三角形と格子の関係

津山高専 幾何学チーム

三村 真史 (電気電子工学科3年)

横見 和也 (電気電子工学科3年)

松本 博充 (電気電子工学科3年)

発表の内容

【1】 $(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)^n$ の x^t の係数を
求める公式

【2】 格子点の配置

【1】 $(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)^n$ の x^t の係数を
求める公式

問題

$(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)^n$ の x^t の

係数 $L_k^n(t)$ は何か？

(ただし $0 \leq t \leq n(k-1)$)

問題の難しさ

例1)

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^9 \text{ の}$$

$$x^{10} \text{ の係数 } L_6^9(10) \text{ は?}$$

多項定理

$(a + b + c + d + e + f)^n$ の $a^{i_0} b^{i_1} c^{i_2} d^{i_3} e^{i_4} f^{i_5}$ の
係数は
$$\frac{n!}{i_0! i_1! i_2! i_3! i_4! i_5!}$$

(ただし $n = \sum_{j=0}^5 i_j$)

(方法1) 多項定理を使う方法

29通りもの場合分けが必要である。

$$(x^5)^2(1)^7 \text{ の場合は } \frac{9!}{2!7!} = 36$$

$$(x^5)^1(x^4)^1(x)^1(1)^6 \text{ の場合は } \frac{9!}{1!1!1!6!} = 504$$

.....

$$(x^3)^2(x^2)^2(1)^5 \text{ の場合は } \frac{9!}{2!2!5!} = 756$$

.....

この結果, x^{10} の係数は,

$$L_6^9(10) = 39303$$

である。

(方法2) K-パスカル三角形を使う方法

(昨年度の井上・山本の研究)

定義1

k-パスカル三角形とは

$(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)^n$ の係数を並べてできた数の三角形のこと。

1		1				1								
1	1					1	1	1						
1	2	1				1	2	3	2	1				
1	3	3	1			1	3	6	7	6	3	1		
1	4	6	4	1		1	4	10	16	19	16	10	4	1
.....														

[2-パスカル三角形]

$$(x + 1)^n$$

[3-パスカル三角形]

$$(x^2 + x + 1)^n$$

[4-パスカル三角形]

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^n$$

注意！K-パスカル三角形は昨年の先輩たちが発見したもので、一般にはよく知られていない。

6ーパスカル三角形

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^n$$

0段 1

1段 1 1 1 1 1 1

2段 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

3段 1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1

[illegible]

9段 1 9 45 165 39303

9段目の左から10番目の数

(方法3) 今回, 我々が考えた方法

主定理

$(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)^n$ の x^t の係数 $L_k^n(t)$ は, $w = t + n - 1$ とおくと,

$$L_k^n(t) = \sum_{0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{t}{k} \right\rfloor} (-1)^j {}_{w-jk}C_{n-1} \cdot {}_n C_j$$

*** * * ポイント * * ***

この公式では, **場合分けは全く必要ない。**
数個のコンビネーションの積と和だけで,
システマティックに計算できる。

主定理による計算

$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^9$ の
 x^{10} の係数 $L_6^9(10)$ は,

$$\begin{aligned} n &= 9, k = 6, t = 10 && \text{なので、} \\ w &= t + n - 1 = 18 && \text{とおくと,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_6^9(10) &= wC_{n-1} - w - k C_{n-1} \cdot n C_1 \\ &= {}_{18}C_8 - {}_{12}C_8 \cdot {}_9C_1 \\ &= 39303 \end{aligned}$$

【その他の例】

$(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^{10}$ の
 x^{30} の係数 $L_7^{10}(30)$?

主定理より, $n = 10$, $K=7$, $t = 30$ なので,
 $w = t + n - 1 = 30 + 10 - 1 = 39$ で,

$$\begin{aligned} L_7^{10}(30) &= {}_{39}C_9 - {}_{39-7}C_9 \cdot {}_{10}C_1 \\ &\quad + {}_{39-14}C_9 \cdot {}_{10}C_2 - {}_{39-21}C_9 \cdot {}_{10}C_3 \\ &\quad + {}_{39-28}C_9 \cdot {}_{10}C_4 \\ &= 17538157 \end{aligned}$$

どのような方法で、主定理を得たか！

それは、 $L_k^n(t)$ が、

n次元 k-lattice の第 t 番目の points 数に一致していることに着目した点にある。

以下で、このことを詳細に説明する。

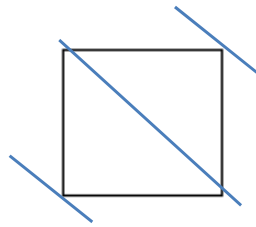
研究の切っ掛け

『数の辞典』(D.ウェルズ, 東京図書)にあった表

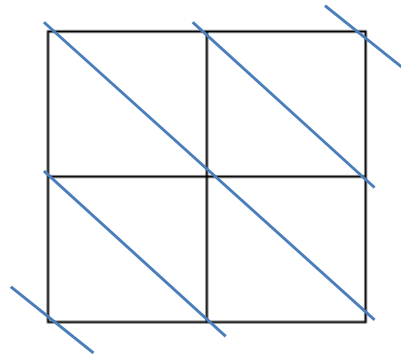
我々は下の列が

『 k -パスカル三角形の第2段目に一致している』
ことに気づいた。

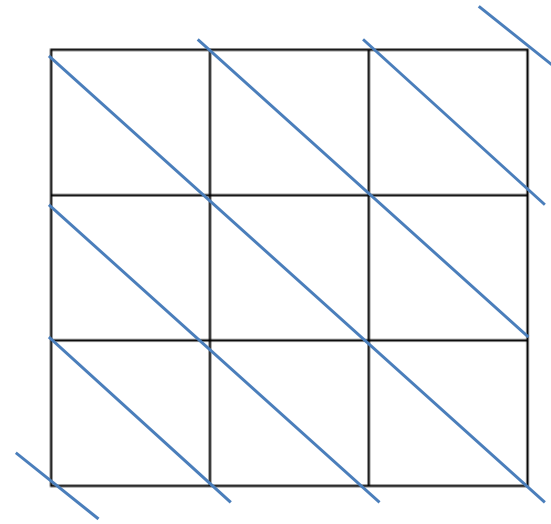
(斜めの線上のlattice points の数を数えよ。)



[1 2 1]

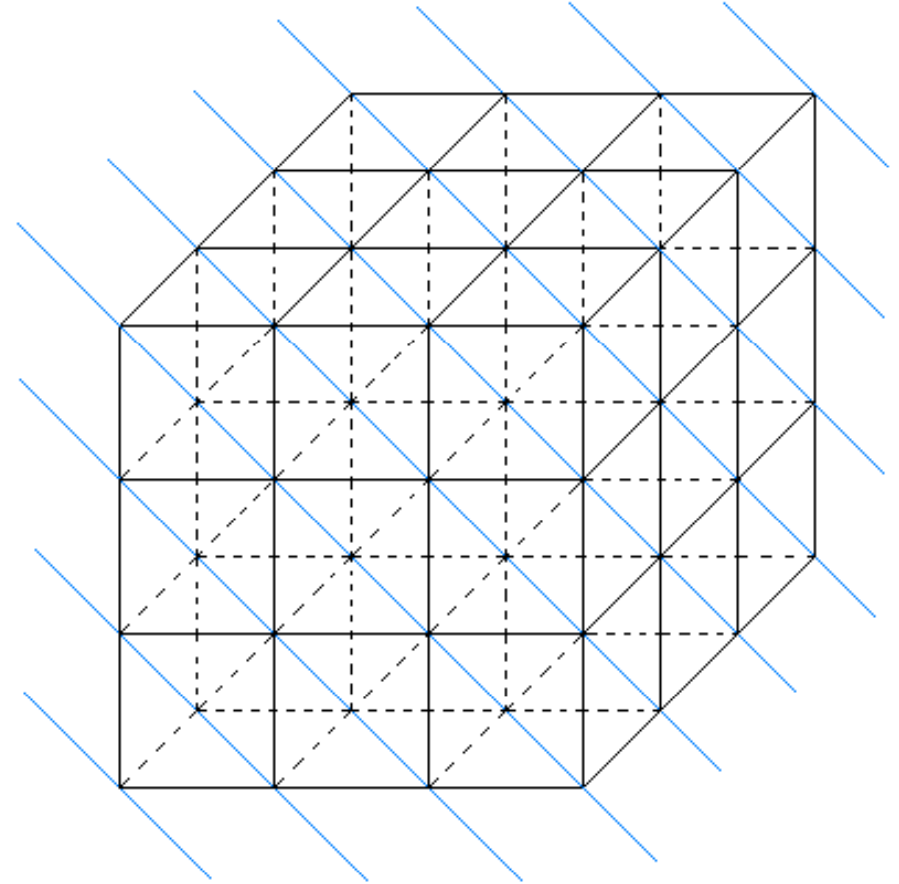
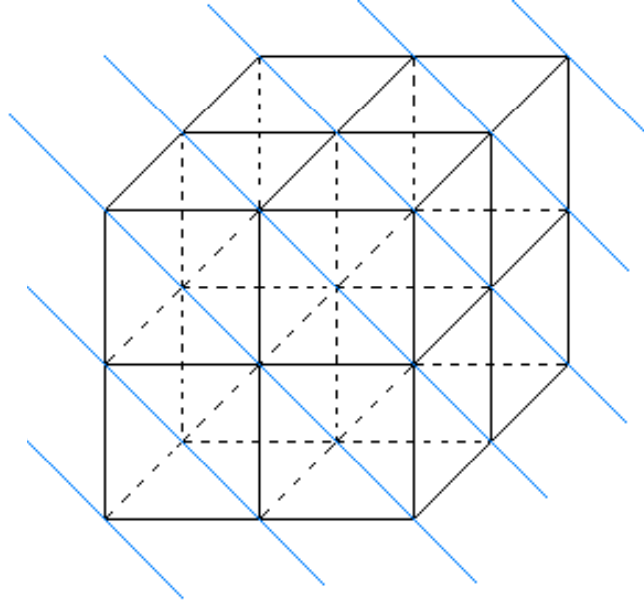
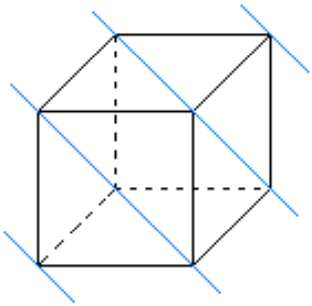


[1 2 3 2 1]



[1 2 3 4 3 2 1]

2次元と同様に，平面 $x + y + z = t$ ($t = 0, 1, 2, \dots$) 上の
 3次元 lattice points 数を調べた。
 これらはk-パスカル三角形の第3段目に一致していた。



[1 3 3 1]

[1 3 6 7 6 3 1]

[1 3 6 10 12 12 10 6 3 1]

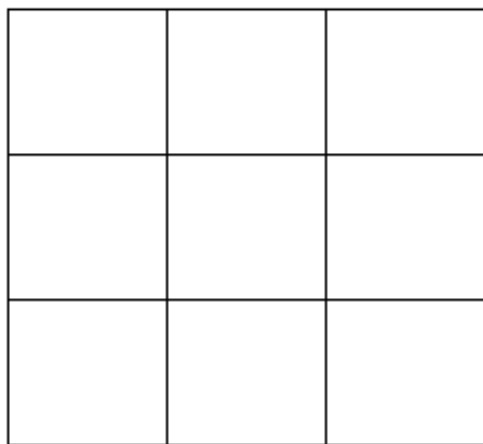
4次元以上を考えるために
k-lattice points 数 $L_k^n(t)$ の定義する。

定義2

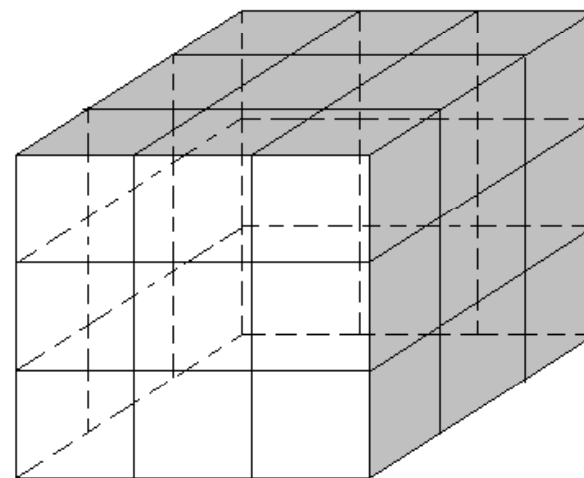
n次元 k-lattice とは,

$$L_k^n$$

$$L_k^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_j \leq k, x_j \in \mathbb{N}\}$$



$$L_4^2$$



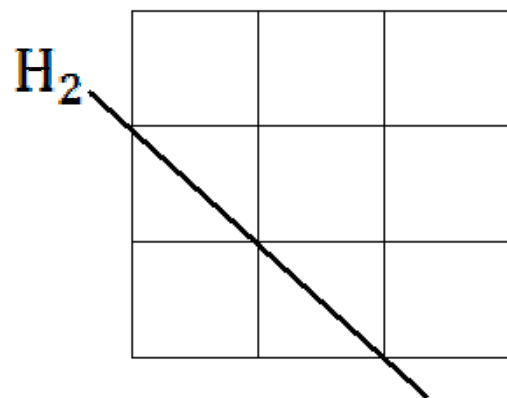
$$L_4^3$$

定義3

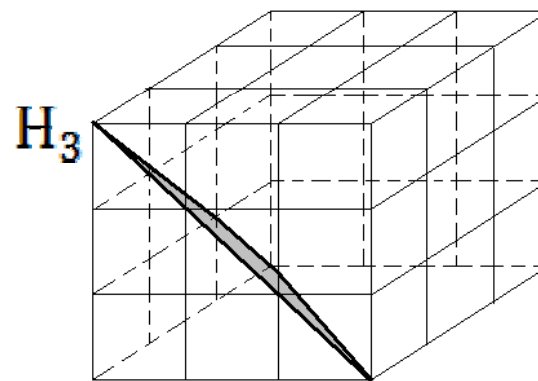
H_t : n 次元空間の法線ベクトル $(1, 1, \dots, 1)$ をもつ
超平面 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = t$ ($0 \leq t \leq n(k-1)$)

定義4

$L_k^n(t)$: L_k^n と H_t の交点数



$$L_4^2(2) = 3$$



$$L_4^3(3) = 10$$

注意！ 以下において、 $L_k^n(t)$ は、係数でなく k -lattice points 数の記号として使用する。

[命題1]

$L_k^n(t)$ は次の式をみたす解の個数である。

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = t$$

ただし $0 \leq x_j \leq k - 1$

(証明) H_t の定義より明らか。

* * * * 命題1を使って, 4次元を調べた。* * *

$L_1^4(t)$ の列は, 1

$L_2^4(t)$ の列は, 1 4 6 4 1

$L_3^4(t)$ の列は, 1 4 10 16 19 16 10 4 1

* k-パスカル三角形の4段目に一致している。

$L_k^n(t)$ とk-パスカル三角形の関係が見えたので、
次の定理2を証明した。これは、

『 $L_k^n(t)$ は、k-パスカル三角形の係数と同じである』

というものである。

定理2によって、
 $L_k^n(t)$ のデータを
数え落とすことなく、
正確に扱うことができるようになった。

定理2

$(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)^n$ の x^t の係数は $L_k^n(t)$ に一致する。

(証明)

$$\begin{aligned} & (x^{k-1} + \cdots + x + 1)^n \\ &= (x^{k-1} + \cdots + 1) \cdots (x^{k-1} + \cdots + 1) \end{aligned}$$

$x^{t_1}, x^{t_2}, \dots, x^{t_n}$ をとり出し積をつくる。

$$x^{t_1} \cdots x^{t_n} = x^{t_1 + \cdots + t_n} = x^t$$

$t_1, t_2, \dots, t_n$ の組み合わせの数が x^t の係数である。

しかも、

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = t \quad (0 \leq t \leq k-1)$$

これは $L_k^n(t)$ である。(証明終)

定理2を使って、
K-パスカル三角形を使った
多くのデータを
日々睨み続け、
係数の公式を試行錯誤した。

いろいろな公式を考えては、却下するの
繰り返しであった。

その中の最も満足いく結果が、
今年9月に発見した
今回の主定理であり、
さらに、その証明も完了した。

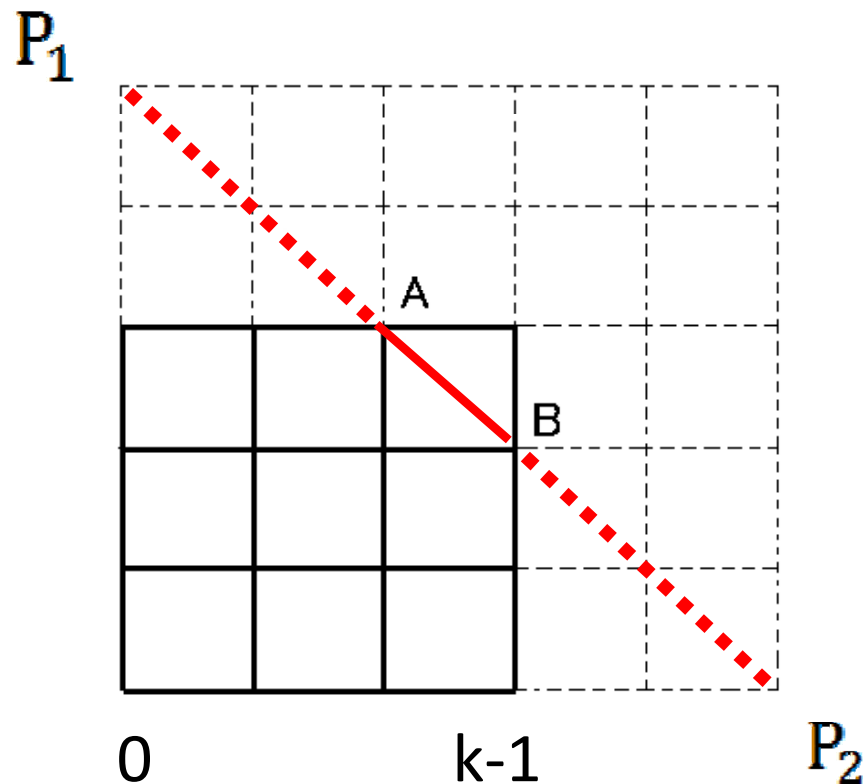
改めて、主定理を述べる。

主定理

$(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)^n$ の x^t の係数 $L_k^n(t)$ は, $w = t + n - 1$ とおくと,

$$L_k^n(t) = \sum_{0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{t}{k} \right\rfloor} (-1)^j {}_{w-jk}C_{n-1} \cdot {}_nC_j$$

(主定理の証明のスケッチ)



lattice L_k^n を考える。
(略図では, 太い線で囲まれた部分)

H_t を AB を通る超平面とする。

$L_k^n(t)$ を求めるために, P_1P_2 まで拡張した超三角錐 T_0^{n-1} を考える。

T_0^{n-1} の頂点は, 実際は,

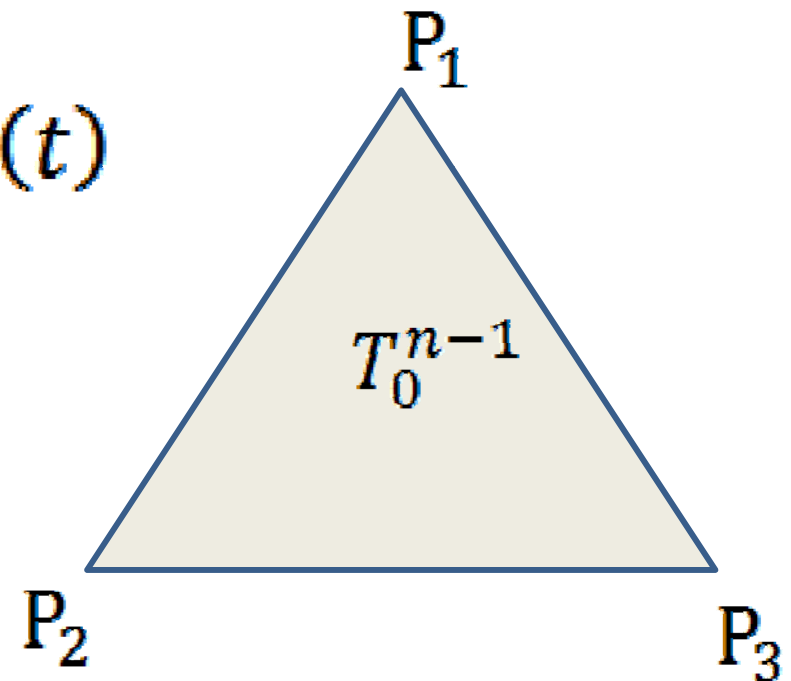
$$P_1(t, 0, 0, \dots, 0), \quad P_2(0, t, 0, \dots, 0), \dots \\ P_{n-1}(0, \dots, 0, t, 0), \quad P_n(0, \dots, 0, t)$$

である。

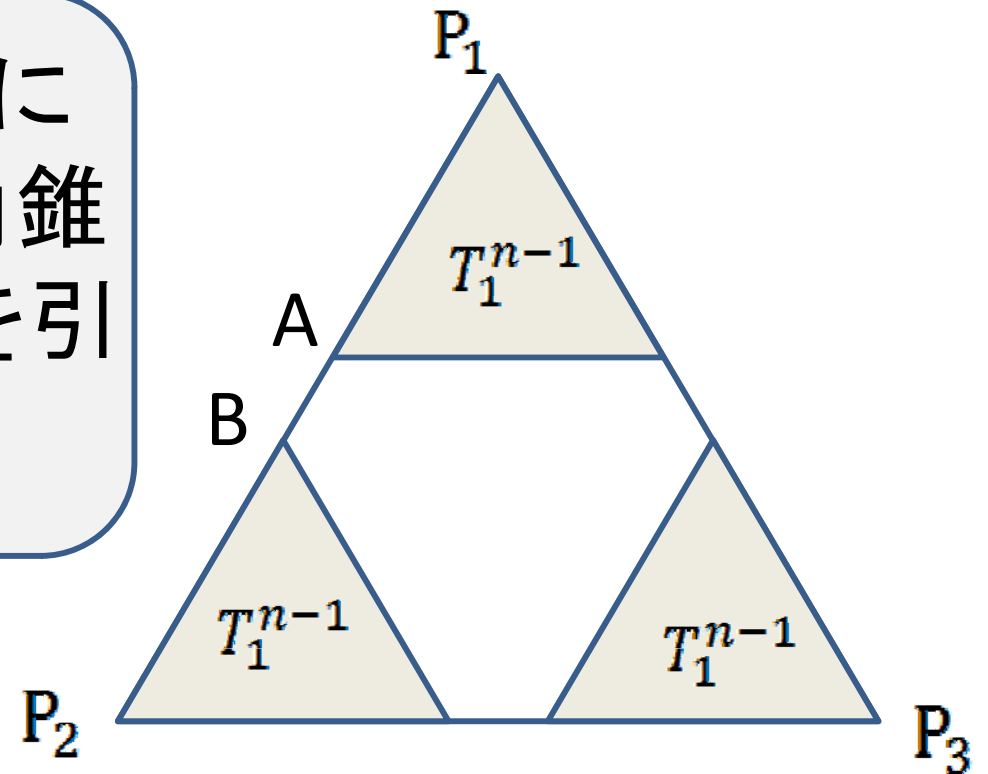
T_0^{n-1} のlattice points 数 $L_{k'}^n(t)$
は, 超三角錐なので, 簡単に
わかり,

$$L_{k'}^n(t) = {}_w C_{n-1}$$

である。



ABの部分 $L_k^n(t)$ を求めるには、外側の n 個の超三角錐 T_1^{n-1} のLattice points 数を引けばよい。



T_1^{n-1} のlattice points の個数は $w-kC_{n-1}$

よって $L_k^n(t) = wC_{n-1} - w-kC_{n-1} \cdot nC_1$

もし、 T_1^{n-1} がもっと大きくて、互いに重なっていたら、

その部分もやはり超平面 T_2^{n-1} であり、
それに含まれる lattice points の数は、
 $w-2k \mathbf{C}_{n-1}$ 個。

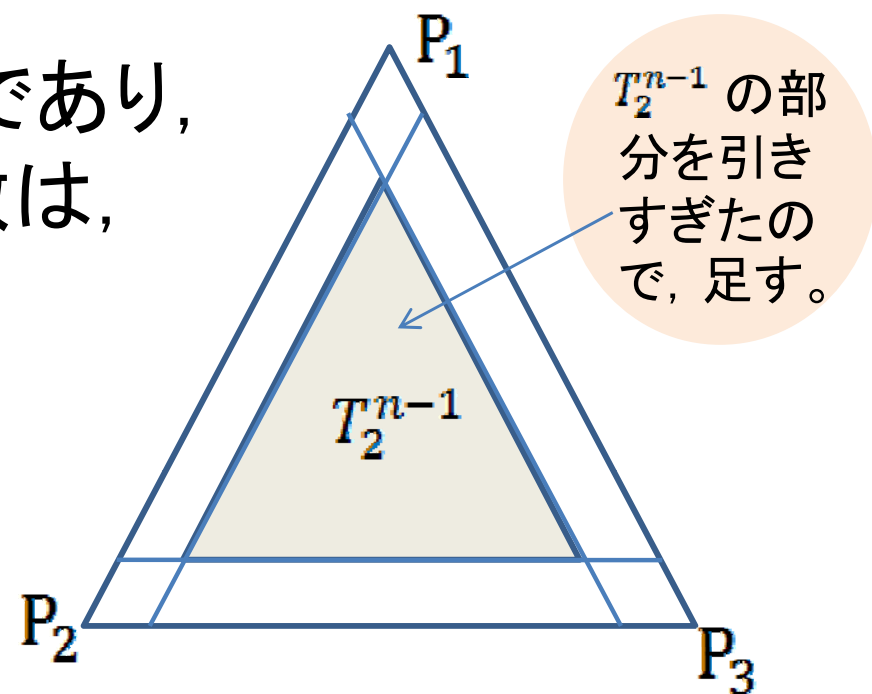
また、 T_2^{n-1} の個数は $n \mathbf{C}_2$ 個。

よって、

$$L_k^n(t) = w \mathbf{C}_{n-1} - w-k \mathbf{C}_{n-1} \cdot n \mathbf{C}_1 + w-2k \mathbf{C}_{n-1} \cdot n \mathbf{C}_2$$

同様のステップを繰り返すことで、主定理 を得る。

(主定理の証明終)



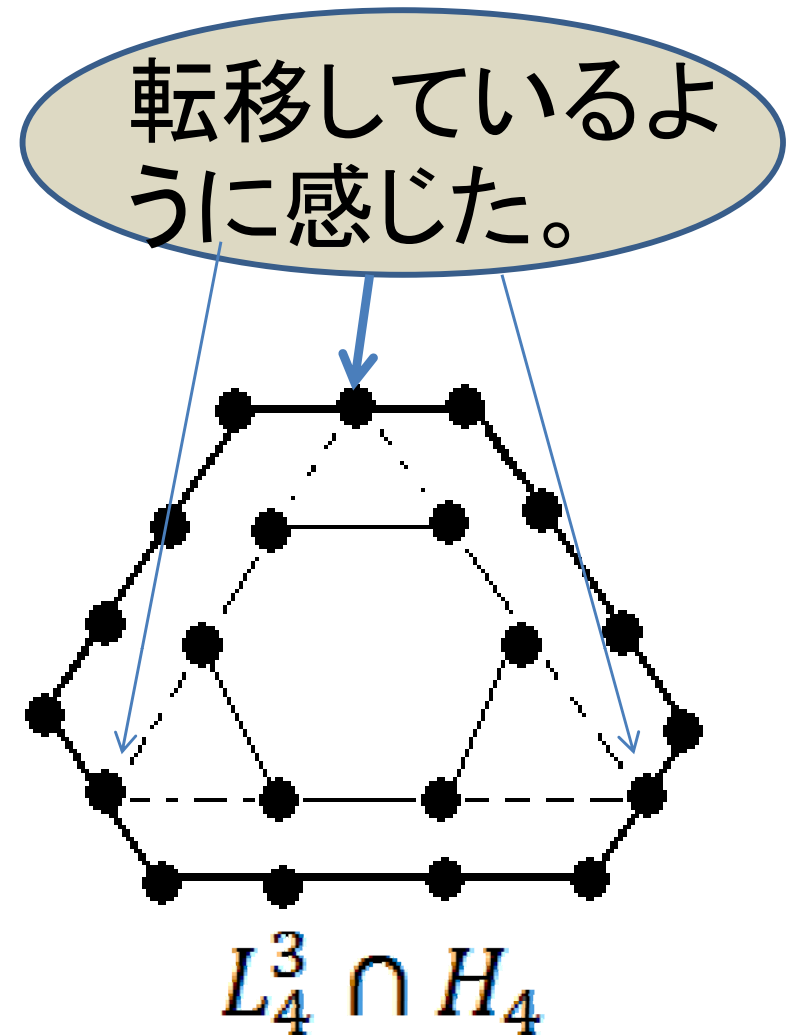
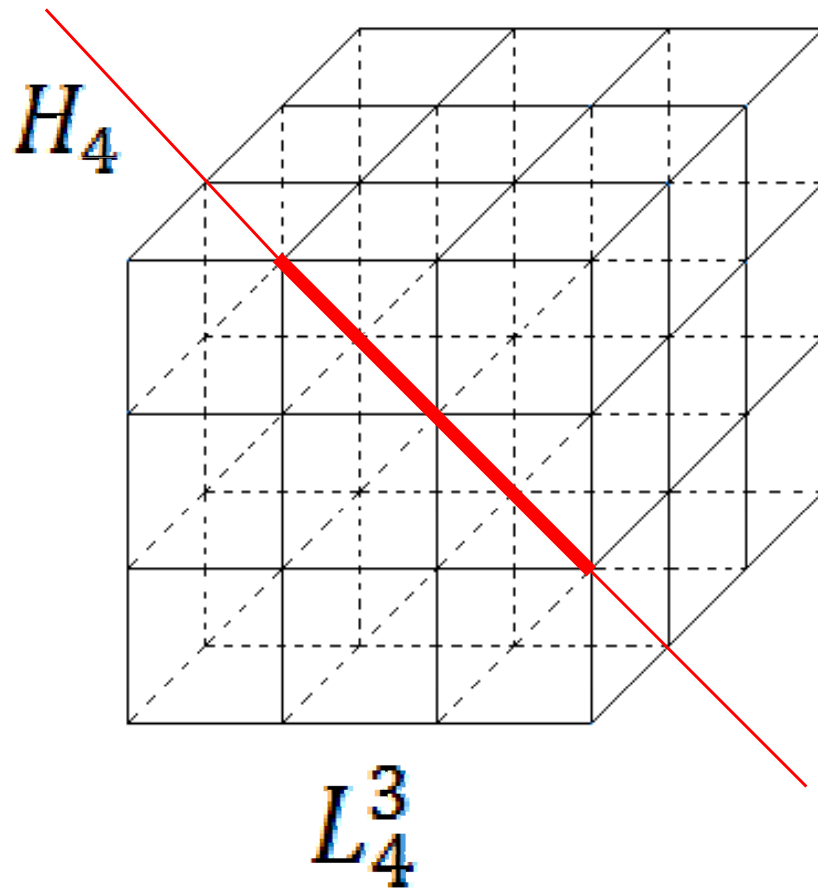
注意！ 証明は $\frac{(1-x^k)^n}{(1-x)^n}$ として、二項定理と $(1-x)^{-n}$ のマクローリン展開を使っても示すことができる。

【2】 格子点の配置

主定理の公式を発見する過程において、
我々は n 番目の超平面上の
lattice points の配置に、
ロシアのマトリョーシカ人形のような構造を感じた
ので、格子点の配置を調べてみようと思った。

マトリョーシカ構造とは？

$L_4^3 \cap H_4$ の構造

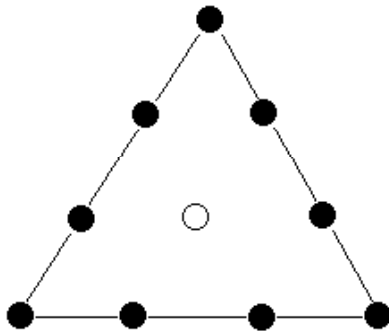


外側から殻を決めると、
2殻あるようにみえた。
(マトリョーシカ構造)

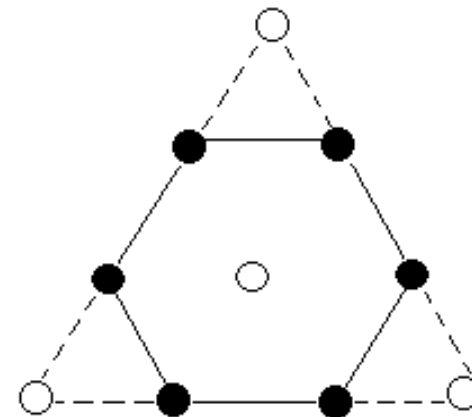
$L_k^n \cap H_t$ のタイプの定義

- ① I 型 : $L_k^n \cap H_t$ の境界 (T^n の内部を除いた部分)
- ② II 型 : I 型と相似でない境界だけのもの

(例) I 型

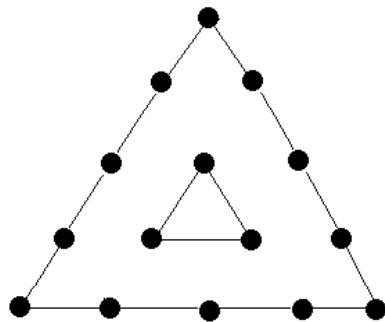


II 型

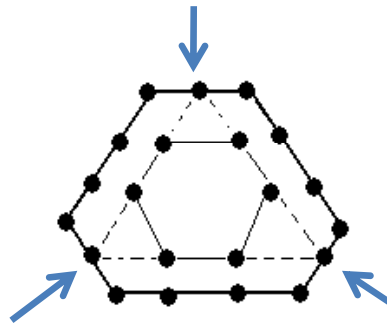


- ③ I^2 型 : I 型が I 型を含むもの
- ④ II^2 型 : II 型が II 型を含むもの
- ⑤ $I^i II^j$ 型 : j 個の II 型が i 個の I 型を含むもの

(例) I^2 型

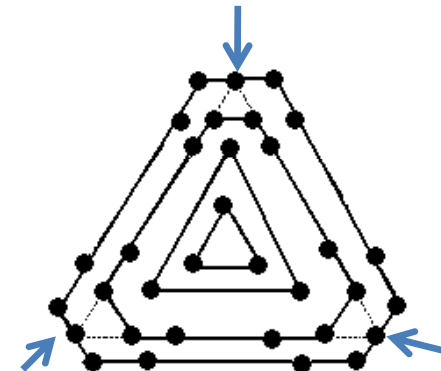


II^2 型



転移しているタイプ。

$I^2 II^2$ 型



転移しているタイプ。

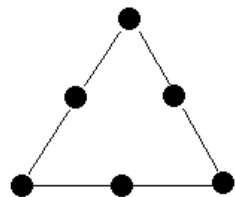
● 内側から順に1殻, 2殻, ... と数える。

双対構造

$L_k^n \cap H_t$ と $L_k^n \cap H_{t'}$ ($t \neq t'$) が互いに双対とは,
 $L_k^n \cap H_t$ と $L_k^n \cap H_{t'}$ が L_k^n の重心に点対称であるとき。

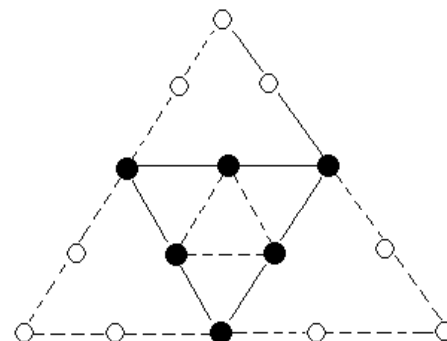
定理3 $\bar{k} = k - 1$, $u = \left\lfloor \frac{n\bar{k}}{2} \right\rfloor$ とする。このとき,
 $L_k^n \cap H_t$ と $L_k^n \cap H_{n\bar{k}-1}$ は, 互いに双対
 である。ただし, $0 \leq t \leq u$ とする。

(例)



$L_3^3 \cap H_2$

と



$L_3^3 \cap H_4$

は互いに双対である。

$L_k^n \cap H_t$ の構造を求めるアルゴリズムについて

殻は t が n 増えるたびに1つずつ増えるので、

$\kappa := \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor + 1$ は**殻数**である。

$e := t - (k - 1)$ は**最も外側の殻の位置**を意味する。

r を $e \leq (n - 1)r$ みたす最小の自然数とする。

$\lambda := 2r - 1$ は、 e の位置での**殻間のスペース数**である。

$\lambda_j = \lambda_{j-1} - 1, \quad \lambda_{j+1} = \lambda_j - 1$ とする。

もし、 $e + i \equiv 0 \pmod{n - 1}$ ならば、

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_{i+1} = \lambda_i - 2$$

または、 $\lambda_1 = \lambda + 1$ とする。

これらの不変量を計算すれば、
 $L_k^n \cap H_t$ の構造を知ることができる。

例) $L_6^5 \cap H_{12}$ の構造

$\kappa = \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{12}{5} \right\rfloor + 1 = 3$ より殻数は 3 である。

$e = t - (k - 1) = 12 - 5 = 7 \leq 4r$ より,

$r = 2$, $\lambda = 3$ である。

次の表を得る。

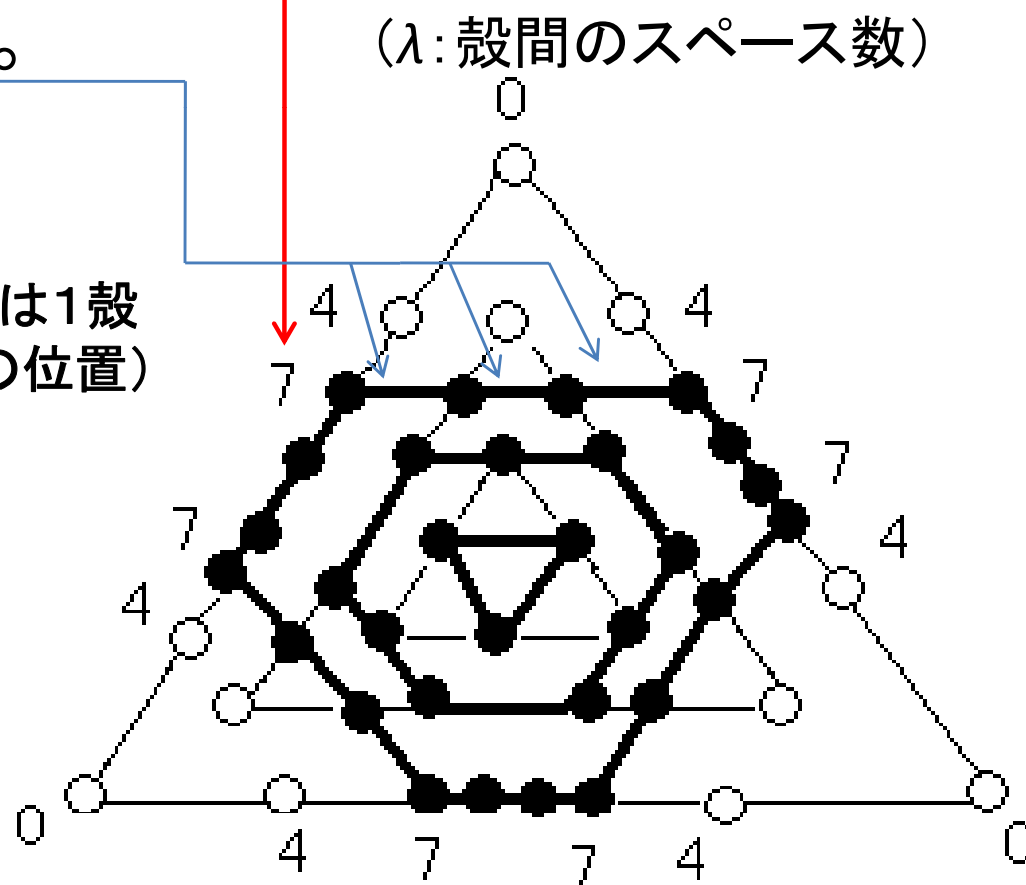
λ_i	3	2	1
$e + i$	7	8	9

($8=2 \times 4$ は1殻
の頂点の位置)

したがって,

$L_6^5 \cap H_{12}$ のタイプは,

Π^3 型 である。



$L_6^5 \cap H_t$ ($0 \leq t \leq 12$) の構造

t	0	1	2	3	4
$L_6^5(t)$	1	5	15	35	70
1 殻	1	5	15	35	70
型	I				

t	5	6	7	8	9
$L_6^5(t)$	126	205	305	420	540
1 殻	1	5	15	35	70
2 殻	125	200	290	385	470
型	I ²	I II			

t	10	11	12
$L_6^5(t)$	651	754	820
1 殻	1	5	10
2 殻	100	185	145
3 殻	550	564	665
型	I II ²		II ³

* 殻のlattice points 数の計算において、**主定理を数回使う**。しかし、実は、II 型は5次の対称性をもつが、その形の複雑さは未だ理解できていない。