素数pを基礎にした完全数の研究

桐山翔伍（津山高専　電気電子工学科４年）

１．はじめに

私はこれまでに知られている完全数をより一般的に扱った「素数pを基礎にした完全数」という数を定義し，研究をおこなっている．

完全数aとは$\tau(a)$をaを除いた約数の和としたとき，$a=\tau(a)$となる数のことである．私は**通常の**$6, 28, 496, 8128, \cdots$ **といった完全数は，「素数 2 を基礎にした完全数」ではないかと考えた**．なぜならこれらは全て，2 のべき乗の和（$1+2+\cdots+2^n$）から得られるメルセンヌ素数に関係しているからである．例えば，完全数 6 は$6=2\times 3$であり，これは$3\ (=1+2)$というメルセンヌ素数に関係し，完全数 28 は$2^2\times 7$であり，これは$7\ (=1+2+2^2)$というメルセンヌ素数と関係している．実は，偶数の完全数は，$2^n\times$(**メルセンヌ素数）という形**に限ることが知られており，ユークリッド・オイラーの定理と呼ばれている．

メルセンヌ素数が 2 のべき乗の和から得られるのであれば，3 のべき乗の和（$1+3+\cdots+3^n$）から得られるメルセンヌ素数，5 のべき乗の和（$1+5+\cdots+5^n$）から得られるメルセンヌ素数，より一般に素数pのべき乗の和（$1+p+\cdots+p^n$）から得られるメルセンヌ素数というものを考えれば，これに関係した**素数pを基礎にした完全数という数があるのではないだろうか**と思い，研究を行った．

本研究内容は，第 8 節までは，論文[K2]に掲載されたものの紹介である．そして，第 9 節において今回新たに得られた結果を報告する．

２．${}^pM_n$完全数

まず素数 2 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 ${}^2M_n$，すなわち，

$${}^2M_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

となる**素数** ${}^2M_n$を考えよう．そして，

$$a=2^{n-1}\times\ {}^2M_n$$

と置く．このとき，$\tau(a)$**を**a**以外の約数の和**とすると

$$a=\tau(a)$$

が成り立つ．すなわち，このようにして得られた数aは全て完全数である．

そこで，素数 3 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 ${}^3M_n$を定義する．それは

$${}^3M_n=1+3+3^2+\cdots 3^{n-1}$$

という**素数** ${}^3M_n$のことである．そして，

$$a=3^{n-1}\times\ {}^3M_n$$

なる数を考えると，

$$a = 2\tau(a) - {}^{3}M_n$$
が成り立つ．さらに素数 5 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 ${}^{5}M_n$を，
$${}^{5}M_n = 1 + 5 + \cdots + 5^{n-1}$$
という**素数** ${}^{5}M_n$とし，
$$a = 5^{n-1} \times {}^{5}M_n$$
を考えると，
$$a = 4\tau(a) - 3 \times {}^{5}M_n$$
が成り立つ．

そこで一般に，素数pのべき乗の和から得られるメルセンヌ素数
$${}^{p}M_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$$
を定義し，${}^{p}M_n$を**pメルセンヌ素数**と呼ぶことにする．そして
$$a = p^{n-1} \times {}^{p}M_n \tag{1}$$
なる数を考えると
$$a = (p-1)\tau(a) - (p-2)\,{}^{p}M_n \tag{2}$$
が成り立つ．これは，簡単な計算から証明できる．このaは${}^{p}M_n$とp^{n-1}の積から得られるため，**${}^{p}M_n$派生数**と呼ぶことにした．

私は，等式(2)が成り立つ数は，${}^{p}M_n$派生数以外にもあるのではないかと思った．そこで，以下を定義し研究を進めた．

> **定義（ ${}^{p}M_n$完全数 ）**
> pを素数，${}^{p}M_n$をpメルセンヌ素数とする．このときaが**${}^{p}M_n$完全数**であるとは，aが
> $$a = (p-1)\tau(a) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$
> を満たすときをいう．

（**注意 1**）$p \geq 3$のとき，${}^{p}M_n$完全数は奇数である．

3. 研究方針

これまで扱われていた完全数については，歴史的な結果がある．それは，紀元前にユークリッドが予想し，18 世紀にオイラーが証明した次の定理である．

> **定理　（ユークリッド・オイラー）**
> $M_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$とし，$a = 2^{n-1}M_n$を考える．このとき$M_n$が素数ならば，$a$は完全数である．逆に，偶数（2 の倍数）の完全数はこのような形に限る．

上の定理(ユークリッド・オイラー)を，${}^{p}M_n$完全数について書きかえることを，本研究の目標とした．

4. $p=3,5,7$の場合の${}^{p}M_n$完全数の研究

本研究の目標は，定理(ユークリッド・オイラー)を，${}^{p}M_n$完全数に書き換えることである．そのために$p=3,5,7$の場合の，特に${}^{p}M_n$派生数以外の${}^{p}M_n$完全数を，フリーソフト wxMaxima を使い，10^6までの範囲でコンピュータを用いて調査した．

$p=3$の場合，${}^{3}M_n$完全数については，${}^{3}M_3=13$ のとき${}^{p}M_n$派生数以外の${}^{p}M_n$完全数として 1809 と 18549 が見つかった．これらの数を分析すると，

$$1809=3^3\times 67,\quad 18549=3^4\times 229$$

となっており，1809は素数67に，18549は素数229を因数として持つことが分かった．$p=5,7$については，${}^{p}M_n$派生数以外の素数pに関する${}^{p}M_n$完全数は見つからなかった．そこで，本研究の目標としている定理(ユークリッド・オイラー)を見直すと，${}^{p}M_n$完全数aをpの倍数である$a=p^{d-1}Q$という形のものに限り調査すればよいのではないかと考えた．

しかし，${}^{p}M_n$完全数aの定義から，$p\geq 3$のときaは奇数であるが，だからといって，aをpの倍数だけに限定することはできない．そこで，もう少し一般にして$a={p_1}^{d-1}Q$(ただしp_1,Qは素数で，p_1はaの最小素因数)という形で考えた方が適切であると判断した．そして，$p=3,5,7$のときの${}^{p}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$のデータを$1\leq d\leq 20$の範囲で調査した．

① $p=3$の場合：${}^{3}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$ のデータ　（${}^{3}M_n=\frac{3^n-1}{2}$，$2\leq n\leq 7$）

n	${}^{3}M_n$	d	p_1	Q	完全数a
3	13	3	3	13	$3^2\times 13$
		4	3	67	$3^3\times 67$
		5	3	229	$3^4\times 229$
		8	3	6547	$3^7\times 6547$
		17	3	129140149	$3^{16}\times 129140149$
		19	3	1162261453	$3^{18}\times 1162261453$
7	1093	7	3	1093	$3^6\times 1093$
		11	3	176053	$3^{10}\times 176053$
		17	3	129139069	$3^{16}\times 129139069$

② $p=5$の場合：${}^5M_n$完全数$a=p_1{}^{d-1}Q$ のデータ　（${}^5M_n=\frac{5^n-1}{4}$，$2\leq n\leq 7$）

n	${}^5M_n$	d	p_1	Q	完全数a
3	31	3	5	31	$5^2\times 31$
		7	5	78031	$5^6\times 78031$
7	19531	3	3	8363	$3^2\times 8363$
		7	5	19531	$5^6\times 19531$

③ $p=7$の場合：${}^7M_n$完全数$a=p_1{}^{d-1}Q$ のデータ　（${}^7M_n=\frac{7^n-1}{6}$，$2\leq n\leq 7$）

n	${}^7M_n$	d	p_1	Q	完全数a
5	2801	5	7	2801	$7^4\times 2801$
		6	7	103643	$7^5\times 103643$

5. データの考察

pメルセンヌ素数${}^pM_n$とは

$$^pM_n=1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}$$

であった．これをp進表示で考えると，1がn個並んだ数

$$^pM_n=11\cdots 1$$

を意味する．この観点から${}^pM_n$完全数aを考察する．そのために，前節で得られた${}^pM_n$完全数$a=p_1{}^{d-1}Q$（ただしp_1,Qは素数）の表を見て，**素数Qをp進表示してみた**．以下がその結果である．

① $p=3$の場合：${}^3M_n$完全数$a=p_1{}^{d-1}Q$の素因数Qの 3 進表示のデータ

n	${}^3M_n$	d	p_1	Q	Qの 3 進表示
3	13	3	3	13	111
		4	3	67	2111
		5	3	229	22111
		8	3	6547	22222111
		17	3	129140149	22222222222222111
		19	3	1162261453	2222222222222222111
7	1093	7	3	1093	1111111
		11	3	176053	22221111111
		17	3	129139069	22222222221111111

② $p=5$の場合：${}^{5}M_n$完全数$a=p_1^{d-1}Q$の素因数Qの 5 進表示のデータ

n	${}^{5}M_n$	d	p_1	Q	Qの 5 進表示
3	31	3	5	31	111
		7	5	78031	4444111
7	19531	3	3	8363	231423
		7	5	19531	1111111

③ $p=7$の場合：${}^{7}M_n$完全数$a=p_1^{d-1}Q$の素因数Qの 7 進表示のデータ

n	${}^{7}M_n$	d	p_1	Q	Qの 7 進表示
5	2801	5	7	2801	11111
		6	7	103643	611111

p進表示されたQには，次のような特徴がある．

（1） ${}^{5}M_n$完全数における$a=3^2\times 8363$以外は，$p_1=p$である．

（2）$p_1=p$の場合，Qをp進表示で考えると，Qはd桁の数であり，1と$p-1$という数だけで構成されている．そして，下n桁まで 1 が並び，$n+1$桁からd桁まで$p-1$が並ぶ．

6. 擬pメルセンヌ数と主結果

${}^{p}M_n$完全数$a=p_1^{d-1}Q$（ただしp_1,Qは素数）においては，$p_1=p$の場合に重要なデータが得られた．すなわち，$a=p^{d-1}Q$のときの素数Qのp進表示に特徴が現れた．この特徴を十進表示で考えると，

$$Q=(p-1)\,{}^{p}M_d-(p-2)\,{}^{p}M_n \qquad (\text{ただし，}d\geq n)$$

となる．これを元に次を定義した．

定義（擬pメルセンヌ数）

d,n を自然数$d\geq n$とする．このとき ${}^{p}K_{d,n}$を

$${}^{p}K_{d,n}=(p-1)\,{}^{p}M_d-(p-2)\,{}^{p}M_n$$

とし，これを**擬pメルセンヌ数**と呼ぶ．

特に，${}^{p}K_{d,n}$が素数のとき，${}^{p}K_{d,n}$を**擬pメルセンヌ素数**という．

（注意 2） 擬pメルセンヌ数の定義により，${}^{p}K_{d,n}$はその形からp進表示すると，n桁までが 1 が並び$n+1$桁からd桁までが$p-1$という数が並ぶことが分かる．

（**注意 3**） $p=2$のとき，注意 2 より ${}^{2}K_{d,n}={}^{2}M_d$である．すなわち，擬pメルセンヌ数はメルセンヌ数である．

以上の準備のもとで，以下に今回の研究で得られた定理を述べる．

定理 1. ${}^{p}M_n$をpメルセンヌ素数，${}^{p}K_{d,n}$を擬pメルセンヌ素数とし，$a=p^{d-1}\,{}^{p}K_{d,n}$とおく．このとき，aは${}^{p}M_n$完全数である．

定理 1 の証明には，高本[Ta]の P. 13 にある次の命題 1 を使った．

命題 1. $S(x)$をxの約数の和とする．もしaとbが互いに素なら，$S(ab)=S(a)S(b)$となる．

定理 1 の証明に命題 1 を使うため，${}^{p}M_n$完全数aの定義を$S(a)$で書きかえておく．${}^{p}M_n$完全数の定義より

$$a=(p-1)\tau(a)-(p-2)\,{}^{p}M_n$$

であり，$\tau(a)=S(a)-a$であるので

$$a=(p-1)(S(a)-a)-(p-2)\,{}^{p}M_n$$

である．よって，

$$pa=(p-1)S(a)-(p-2)\,{}^{p}M_n \tag{3}$$

を得る．

（**定理 1 の証明**） (3)が成り立つことを示す．p^{d-1}と${}^{p}K_{d,n}$は互いに素であるので命題 1 より

$$S(a)=S\left(p^{d-1}\right)S\left({}^{p}K_{d,n}\right)=\frac{p^d-1}{p-1}\left(1+{}^{p}K_{d,n}\right)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}(p-1)S(a)&=\left(p^d-1\right)\left(1+{}^{p}K_{d,n}\right)=p^d-1+pa-{}^{p}K_{d,n}\\&=(p-1)\,{}^{p}M_d+pa-{}^{p}K_{d,n}\end{aligned}$$

である．${}^{p}K_{d,n}=(p-1)\,{}^{p}M_d-(p-2)\,{}^{p}M_n$ より，

$$pa=(p-1)S(a)-(p-2)\,{}^{p}M_n$$

となり，aは${}^{p}M_n$完全数である．（証明終）

7. 定理 1 の逆に関する考察

定理(ユークリッド・オイラー)に対応する定理 1 の逆が成り立つかを解決することが，重要な課題となった．

予想 1.　pの倍数である${}^{p}M_n$完全数は$a = p^{d-1}\,{}^{p}K_{n,d}$に限る．

以下，予想 1 について考察する．

Qはpを因数に持たない自然数とし$a = p^{d-1}Q$ とおく．さらに，aは${}^{p}M_n$完全数とする．このとき(3)より，

$$p^dQ = (p-1)S\left(p^{d-1}\right)S(Q) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

が成り立つ．$S\left(p^{d-1}\right) = \frac{p^d-1}{p-1}$より，

$$S(Q) = \frac{p^dQ + (p-2)\,{}^{p}M_n}{p^d-1} = Q + \frac{Q + (p-2)\,{}^{p}M_n}{p^d-1}$$

である．$\tau(Q)$はQを除く約数の和であるから，

$$S(Q) - Q = \tau(Q) = \frac{Q + (p-2)\,{}^{p}M_n}{p^d-1} = \frac{Q + (p-2)\,{}^{p}M_n}{(p-1)\,{}^{p}M_d}$$

であることが分かる．よって，

$$Q = (p-1)\tau(Q)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n = (p-1)\,{}^{p}M_d(\tau(Q)-1) + {}^{p}K_{d,n} \tag{4}$$

を得る．特に，Qが素数のとき，$\tau(Q) = 1$であるので，

$$Q = (p-1)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n = {}^{p}K_{d,n}$$

となる．

以上の式変形から得られた，${}^{p}M_n$完全数aの定義に類似した等式(4)を，命題としておく．

命題 2. Qはpを因数に持たない自然数とし，$a = p^{d-1}Q$ とする．このとき，aが${}^{p}M_n$完全数であるならば，

$$Q = (p-1)\tau(Q)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

が成り立つ．　逆にQがこれを満たせばaは${}^{p}M_n$完全数となる．

命題 2 によって，予想 1 は部分的に解決でき，以下の定理を得る．

定理 2. $a = p^{d-1}Q$ という形の${}^{p}M_n$完全数は，Qが素数ならばQは擬pメルセンヌ素数である．

定理 2 により，次はQが合成数の${}^{p}M_n$完全数を調べなければならない．次の命題は，このために役に立つ．

命題 3. Qはpを因数に持たない合成数とし，$a = p^{d-1}Q$ とする．さらに，aは${}^{p}M_n$完全数であるとする．このとき，もし$d \geq n$ならば，Qの任意の素因数qは

$$(p-1)\,{}^{p}M_d < q$$

を満たす.

（**証明**）　aは${}^{p}M_n$完全数であるので，Qは命題 2 の等式を満たす．その等式において$Q = qb$とすると，

$$qb = (p-1)\tau(qb)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n \tag{5}$$

となる．(5)は$\tau(qb) = 1 + q + b + C$と置くと，

$$qb = (p-1)(1+q+b+C)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

となる．${}^{p}K_{d,n} = (p-1)M_d - (p-2)M_n$より，

$$qb = {}^{p}K_{d,n} + (p-1)(q+b+C)\,{}^{p}M_d \tag{6}$$

である．$d \geq n$ より${}^{p}K_{d,n} > 0$であり，さらに(6)より

$$\big(q - (p-1)\,{}^{p}M_d\big)b = {}^{p}K_{d,n} + (p-1)(q+C)\,{}^{p}M_d > 0$$

となる．したがって，$(p-1)\,{}^{p}M_d < q$ である．（証明終）

命題 3 を使うと予想 1 に関係する以下の定理が証明できる.

定理 3. $p \geq 3$，Qはpを因数に持たない合成数とする．このとき，$a = p^{cn-1}Q$（$c \geq 1$）は${}^{p}M_n$完全数ではない.

（**証明**）$a = p^{cn-1}Q$は完全数とし矛盾を導く．$d = cn$より

$$\begin{aligned}{}^{p}M_d &= (1 + p + \cdots + p^{n-1}) + (p^n + p^{n+1} + \cdots + p^{2n-1}) + \cdots \\ &\quad + \big(p^{n(c-1)} + p^{n(c-1)+1} + \cdots + p^{cn-1}\big) = \big(1 + p^n + \cdots + p^{n(c-1)}\big)\,{}^{p}M_n\end{aligned}$$

で，命題 2 より，

$$Q = \big\{(p-1)\big(1 + p^n + \cdots + p^{n(c-1)}\big)\tau(Q) - (p-2)\big\}\,{}^{p}M_n$$

である．よって，${}^{p}M_n$はQの素因数である．したがって，命題 3 において$q = {}^{p}M_n$としてもよい．しかし，$(p-1)\,{}^{p}M_d = \big(1 + p^n + \cdots + p^{n(c-1)}\big)\,{}^{p}M_n \geq {}^{p}M_n$となり命題 3 に矛盾する.　　　よって，$a$は${}^{p}M_n$完全数ではない.（証明終）

定理 3 が証明できたので，予想 1 は，『$p \geq 3$, $d \neq cn$で，Qは素数でない』場合に，$a = p^{d-1}Q$が${}^{p}M_n$完全数でないことを示す場合が残された．しかし，この場合を示すことはとても難しく，今のところ私はその証明を示すことができない.

8. pの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数

これまで，pの倍数である ${}^{p}M_{n}$完全数について説明してきたが，pの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数が存在することがわかった．これまでの調査で，私は，以下の４つのpの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数を見つけたからである．

(1) ${}^{5}M_{7}$完全数：$a = 3^2 \times 8363$，ここで ${}^{5}M_{7} = 19531$である．
(2) ${}^{31}M_{17}$ 完全数：$a = 13 \times 1282261542060234416042729$，ここで ${}^{31}M_{17} = 751670559138758105956097$である．
(3) ${}^{127}M_{5}$完全数：$a = 107 \times 1725060343$，ここで${}^{127}M_{5} = 262209281$である．
(4) ${}^{193}M_{5}$完全数：$a = 191 \times 266390432827$，ここで${}^{193}M_{5} = 1394714501$である．

これらの ${}^{p}M_{n}$完全数はどれも$a = p_1^{j} \times Q$でp_1, Qは素数で$p_1 < p$となっている．さらに，その特徴を調べるために，素数Qはp進表示でどのような数になるのかを調べてみた．その結果，(1) において $Q = 8363$ は 5 進表示で 6 桁，(2) において $Q = 1282261542060234416042729$は31進表示で 17 桁, (3)において$Q = 1725060343$は127進表示で5桁，(4) において$Q = 266390432827$は193進表示で5桁であることがわかった．(2)から(4)についてQのp進表示での桁数は ${}^{p}M_{n}$完全数におけるnと一致する．しかし，(1)においては一致しない．そこで，(1)を ${}^{5}M_{7}$完全数：$a = 3 \times (3 \times 8363)$と考え，$3 \times 8363$の5進表示での桁数を求めると7桁となっり，$n$と一致する．よって，$p$の倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数について，私は以下の予想をたてている．

予想 2. pの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数aを$a = p_1 Q$とし，p_1 はaの最小素因数で，$p_1 < p$であるとする．このとき，合成数Qをp進表示で表すとQの桁数はnである．

9. 双子素数の調査から得られたpの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数

４つのpの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数はどれも$a = p_1^{j} \times Q$でp_1, Qは素数で$p_1 < p$となっていたが，それ以上の手掛かりがなく，第 5 番目のpの倍数でない ${}^{p}M_{n}$完全数を見つけることはとても難しく思えた．pとnとp_1はどのような素数なのであろうか．あるとき，pとnとp_1が双子素数と関係あるのではないかと思った．

p	n	p_1
5	7	3
31	17	13
127	5	107
193	5	191

その理由は，$p = 127$以外の$p = 5,31,193$は双子素数の片方であり，$n = 5,7,17$も$p_1 = 3,13,107,191$も双子素数の片方であったからである．

素数の一覧表から双子素数をピックアップしデータベースを作り，その中から，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数を調査した. その結果, 双子素数$(617,619)$と$(191,193)$から，$p = 619$, $n = 11$, $p_1 = 193$のとき，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数であるものが得られた．つまり，${}^{619}M_{11} = 827196454187964899 1904246901$に対して,

$$ {}^{619}M_{11}\text{完全数：}a = 193 \times 1200894617021116100 7070400513 $$

が，第 5 番目のpの倍数でない${}^{p}M_n$完全数なのである．同時に，第 6 番目のpの倍数でない${}^{p}M_n$完全数も得られた．それは,

$$ {}^{619}M_{11}\text{完全数：}a = 263 \times 1437690738687251669 8605408943 $$

である．さらに,

$$ Q = 12008946170211161007070400513，Q = 14376907386872516698605408943 $$

は619進表示で 11 桁であり，予想 2 のとおりとなっている．

現在，$p = 2731$まで調査したが，第 7 番目のpの倍数でない${}^{p}M_n$完全数は見つかっていない．

10. おわりに

本研究は，通常の完全数を「素数 2 を基礎にした完全数」と考えたことからスタートし，完全数を${}^{p}M_n$完全数へ拡張した研究である．その第 1 の目的は,「偶数の完全数は，$2^n \times$(メルセンヌ素数）という形に限る」というユークリッド・オイラーの定理を，${}^{p}M_n$完全数へ拡張することであった．そして,「${}^{p}M_n$をpメルセンヌ素数，${}^{p}K_{d,n}$を擬pメルセンヌ素数とし，$a = p^{d-1}\,{}^{p}K_{d,n}$とおくと，$a$は${}^{p}M_n$完全数となる」ことを証明した．しかし，その逆が課題として残っている．

一方，「奇数の完全数は存在するのか」という未解決問題に対応する結果として,「$p \geq 3$については，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数が存在する」ことが得られた．具体的に 6 つのpの倍数でない${}^{p}M_n$完全数を得ている．しかし，その構造が全く分かっていないため，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数を発見する方法が分からないのである．私は，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数の研究は，奇数の完全数の存在問題の研究に繋がるのではないかと考えている．

参考文献

[I1] 飯高茂，数学の研究をはじめよう／高校生の定義した新しい完全数，その衝撃－前編，現代数学 2017 年 5 月号，現代数学社，pp. 79-85

[I2] 飯高茂，数学の研究をはじめよう／高校生の定義した新しい完全数，その衝撃－後編，現代数学 2017 年 6 月号，現代数学社，pp. 82-87

[K1] _____，メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 VOL23 No1(2017)，pp. 181-190

[K2] _____，素数pを基礎にした完全数の研究，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 VOL24 No1(2018)，pp. 58-66

[Ta] 高木貞治，初等整数論講義第２版，共立出版，(1971)