「教科書には載っていない数学」

私たちの見つけた
超パスカル三角形と超フィボナッチ数列が
作り出す美しき世界

井上昌樹，大西史花，山本裕子（情報工学科２年），

アクチバヤル・アマルサナー（情報工学科４年）

１．序（今までよく知られていたこと）

● **美しき数（その１）　黄金比（星形の比）**

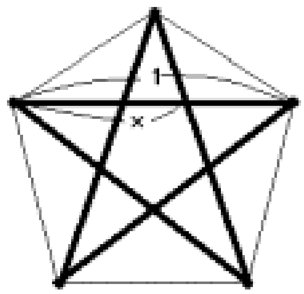
黄金比とは，右図の正確な星の辺の関係で，

$$1:x = x:1-x$$

をみたす．これより，$x^2+x-1=0$ で，

これを解くと

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$ になる．



● **美しき数（その２）　フィボナッチ数列（前の２つの数を足して作る数列）**

0　1　1　2　3　5　8　13　21　34　55　89　・　・　・

● **美しき数（その３）　パスカル三角形　（上の２つの数を足して作る数の三角形）**

1	
1　1	$x+1$
1　2　1	$x^2+2x+1=(x+1)^2$
1　3　3　1	$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$
1　4　6　4　1	$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4$

＊パスカル三角形は，$(x+1)^n$ の係数になっている．$x+1$ をパスカル三角形の定義式という．

● **これらの数の美しき関係**

$$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{5}{8}\quad\frac{8}{13}\quad\frac{13}{21}\quad\frac{21}{34}\quad\frac{34}{52}\cdots$$ → 黄金比 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ に限りなく近づく

0　1　1　2　3　5　8　13・・・(斜めに足すと，フィボナッチ数列)

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

1　5　10　10　5　1

（パスカル三角形　：$(x+1)^n$ の係数）

> パスカル三角形の定義式と $\frac{1}{x}$ を等号で結んだ式を黄金式と呼ぶ.つまり黄金式とは $x+1=\frac{1}{x}$ のことであり，このとき黄金比 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金式の解となる.

２．井上，大西，山本（津山高専２年）の研究

２－０ 研究のはじまり

パスカル三角形は，$11,\quad 11^2=121,\quad 11^3=1331,\quad 11^4=14641$**，・・・・・となっている．**
$111,\quad 111^2=12321,\quad 111^3=1367631$**，・・・の三角形を考えてみたらどうなるのだろうか？**

＊ 111 の三角形を P[3]型の三角形と名付けた．

【結果１】 P[3]型の三角形は，$(x^2+x+1)^n$ の係数になっている．

（P[3]型の三角形は，上の数字を３つ足して作った三角形.）

1	
1 1 1	x^2+x+1
1 2 3 2 1	$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$
1 3 6 7 6 3 1	$x^6+3x^5+6x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^3$
1 4 10 16 19 16 10 4 1	$x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1$ $=(x^2+x+1)^4$

【結果２】 P[3]型の三角形を斜めに足すと，3 項フィボナッチ数列が現れる．

＊3 項フィボナッチ数列とは，前の 3 つの数を足して作られた数列のこと．

0 1 1 2 4 7 13 24 44 ・・・・・・ （3 項フィボナッチ数列）

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
1 ・・・・・・

（P[3]型の三角形：$(x^2+x+1)^n$ **の係数）**

【結果３】 3 項フィボナッチ数列の分数の極限

$$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{4}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{7}{13}\quad\frac{13}{24}\quad\frac{24}{44}\quad\cdots\cdots$$ は，

黄金式 $x^2+x+1=\dfrac{1}{x}$ の解に近づく．

＊この解を超黄金比と名付けた．

＊超黄金比の命名は，飯高茂教授（学習院大学教授，元日本数学会理事長）による．

２－１　k 項フィボナッチ数列の詳細研究

フィボナッチ数列の各数をある数 m で割ったときの余りを並べた数列が周期的であることは，これまでよく知られていた．

例）5 で割った割った余りの数列（周期 20）

0 1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0 1 1 2 3・・・

そこで，k 項フィボナッチ数列 $f(n)$ を次のように定義し周期の研究を行った．

k 項フィボナッチ数列 $f(n)$ の定義
$t \leqq 0$ のとき $f(t)=0$， $f(1)=1$， $f(n)=f(n-1)+f(n-2)+\cdots+f(n-k)$

例）３項フィボナッチ数列は，$\cdots=f(-1)=f(0)=0$ で，1 番目が１で，その後は前の３つの数字を足してできる数列　：　0 1　1　2　4　7　13・・・

４項フィボナッチ数列は，$\cdots=f(-1)=f(0)=0$ で，1 番目が１で，その後は前の４つの数字を足してできる数列　：　0 1　1　2　4　8　15　・・・

【結果４】　k 項フィボナッチ数列は，$P[k]$ 型の三角形を斜めに足してできる．

【結果５】　k 項フィボナッチ数列を m で割った余りの数列は周期的である．

（これは鳩ノ巣原理を使って証明できる.）

例）3 項フィボナッチ数列で４で割った余りの数列（周期８）ただし，第－１項からスタート．　0 0 1 1 2 0 3 1 0 0 1 2 ・・・・・

次に周期を求める公式という詳細研究に移ったが，以下の結果しか得られていない．

【結果６】　k 項フィボナッチ数列を m で割った余りの数列は (k－1)個の 0 が並んだ部分が周期的である．

（これは数学的帰納法を使って証明できる.）

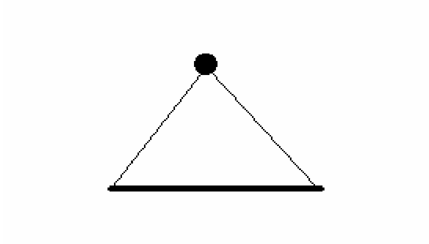
例）3項フィボナッチ（7で割った余りの数列）：　0 0 が周期的に現れる．

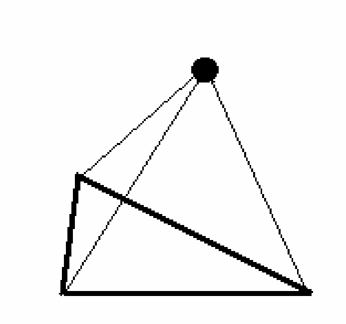
0 0 1 1 2 4 0 6 3 2 4 2 1 0 3 4
0 0 4 4 1 2 0 3 5 1 2 1 4 0 5 2
0 0 2 2 4 1 0 5 6 4 1 4 2 0 6 1
0 0 1 1 2 4 0 6 3 2 4 2 1 0 3 4

２－２　P[k]型の三角形の詳細研究（三角錐数との関係）

【４次元の（超）三角錐とは】

ステップ１．２次元（xy 平面）において，x 方向を $(1,0)$ 方向といい，y 方向を $(0,1)$ 方向と呼ぶ．直線から三角形へは，$(0,1)$ 方向のある地点から直線の端へ向かって２本の線を下ろすと三角形ができる．



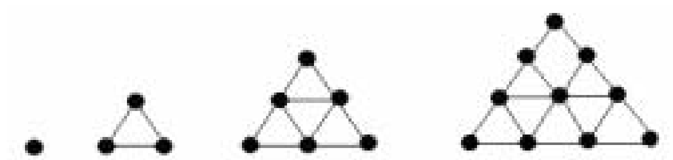


ステップ２．３次元（xyz 空間）において，x 方向を $(1,0,0)$ 方向，y 方向を $(1,0,0)$ 方向，z 方向を $(1,0,0)$ 方向と呼ぶ．$(0,0,1)$ 方向のある地点から三角形の頂点へ向かって３本の線を下ろすと三角錐ができる．

ステップ３．４次元は，$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ という４つの方向を持つ空間である．$(0,0,0,1)$ 方向のある地点から三角錐の４つ頂点へ向かって４本の線を下ろすと４次元の三角錐（超三角錐）ができる．（もう絵に描けない）

同様に，５次元の三角錐，６次元の三角錐，・・・・・を作ることができる．

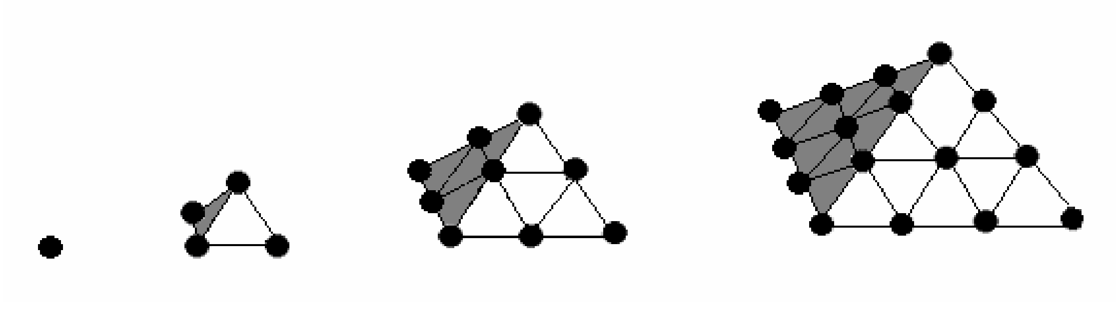
【三角数】



三角数　　１　　３　　６　　１０

三角数のしくみ　　1+2=3，　1+2+3=6，　1+2+3+4=10，　1+2+3+4+5=15，　・・・・・

【三角錐数】



１　　４　　１０　　２０

三角錐数のしくみ　1+3=4，　4+6=10，　10+10=20，　・・・・・

三角錐数の計算方法，さらに，超三角錐数の計算方法

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・・・・
三角数	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	・・・・・・
三角錐数	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	・・・・・・
超三角錐数	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	・・・・・・

【結果７】P[k]型の三角形の右（左）からｊ番目の数はｊ次元の三角錐数が並ぶ.　（ただし$1 \leqq j \leqq k$）

注意）自然数は１次元の三角錐数，三角数は２次元の三角錐数といえる.

例）P[5]型の三角形

1

1　1　1　1　1

1　2　3　4　5　4　3　2　1

1　3　6　10　15　18　19　18　15　10　6　3　1

1　4　10　20　35　52　68　80　85　80　68　52　35　20　10　4　1

右（左）から３番目の数は２次元の三角錐数（三角数）　１，３，６，１０,・・・
右（左）から４番目の数は３次元の三角錐数　１，４，１０，２０,・・・
右（左）から５番目の数は４次元の三角錐数　１，５，１５，３５,・・・

＊　さらに結果７は実際にP[k]型の三角形をつくるときも非常に役にたつ.

例）P[5]型の三角形の構造（上の数字を５つ足さなくてもよい）

1

1　1　1　1　1

1　2　3　4　5　4　3　2　1

-1　-2　-3　-4　-5　-4　-3　-2

1　3　6　10　15　18　19　18　15　10　6　3　1

-1　-3　-6　-10　-15　-18　-19　-18　-15　-10　-6　-3

1　4　10　20　35　52　68　80　85　80　68　52　35　20　10　4　1

３．アクチバヤル・アマルサナー（津山高専４年）の研究

３－１　N項フィボナッチ数列の一般項の研究

普通のフィボナッチ数列については，ビネの公式が有名である．

（ビネの公式）　$f(n)$ をフィボナッチ数列とする．このとき，

$$f(n)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$$

である．ここで，α,β は $x^2-x-1=0$ の解である．

問題：３項フィボナッチ数列，４項フィボナッチ数列では，ビネの公式はどうなるのか．

【結果８】３項フィボナッチ数列を　$f(n)$ とする．$x^3-x^2-x-1=0$ の解を，α_1，α_2，α_3 とすると，

$$f(n)=c_1{\alpha_1}^n+c_2{\alpha_2}^n+c_3{\alpha_3}^n$$

であり，$c_1=\dfrac{\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}$，$c_2=\dfrac{\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}$，$c_3=\dfrac{\alpha_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}$ である．

【結果９】４項フィボナッチ数列を　$f(n)$ とする．$x^4-x^3-x^2-x-1=0$ の解を，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ とすると，

$$f(n)=c_1{\alpha_1}^n+c_2{\alpha_2}^n+c_3{\alpha_3}^n+c_4{\alpha_4}^n$$

であり，$c_1=\dfrac{{\alpha_1}^2}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}$，$c_2=\dfrac{{\alpha_2}^2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$，
$c_3=\dfrac{{\alpha_3}^2}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}$，$c_4=\dfrac{{\alpha_4}^2}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}$ である．

＊証明のポイントの１つは $x^3-x^2-x-1=0$ や $x^4-x^3-x^2-x-1=0$ に重根がないことを示すこと．$x^n-x^{n-1}-\cdots-x-1=0$ に重根が無いことも示された．

そして５項フィボナッチ数列でも同様に美しい結果を得た．６以上の一般の N 項フィボナッチ数列の場合も同様な結論になると予想されるが未解決である．

３－２　N項フィボナッチ数列を係数にもつ級数の研究

普通のフィボナッチ数列を係数にもつ級数

$$x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+\cdots+f(n)x^n+\cdots$$

は一体どういう関数になるだろうか．それは，

$$F(x)=\frac{-x}{x^2-x-1}$$

であることが知られている．（＊収束半径は黄金比）

問題：N項フィボナッチ数列における級数はどのような関数か．またその応用は何か．

【結果１０】　３項フィボナッチ数列を係数とする級数

$$x+x^2+2x^3+4x^4+7x^5+13x^6+\cdots+f(n)x^n+\cdots$$

は，

$$F(x)=\frac{-x}{x^3-x^2-x-1}$$

である．

＊ **収束半径は超黄金比である．（超黄金比は $\frac{1}{2}$ と黄金比 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ の間に在る）**

＊ **全ての N 項フィボナッチ数列でも同様な結論を得た．**

（応用）

【結果１１】　１枚のコインを数回投げて，N 回続けて表がでたら終了するゲームを考える．k 回目に終了する確率を，p_k，期待値（平均）を $E[X]$ とすれば，

$$p_k=\frac{f(k-N+1)}{2^k},\qquad E[X]=\frac{1}{2}\frac{dF}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{N-1}{2^{N-1}}F\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N+1}-2$$

である．ここで，$f(n)$ は N 項フィボナッチ数列であり，$F(x)=\dfrac{-x}{x^N-x^{N-1}-\cdots-1}$ である．

例）　１枚のコインを何回か振って，３回続けて表がでたら終了するゲームでは，

$$p_k=\frac{f(k-2)}{2^k},\qquad E[X]=2^{3+1}-2=14$$

である．すなわち，平均 14 回で終了する．

４回続けて表がでたら終了するゲームでは，

$$p_k=\frac{f(k-3)}{2^k},\qquad E[X]=2^{4+1}-2=30$$

である．すなわち平均 30 回で終了する．

＊以上の内容は，2005 年 8 月に上海で開催される数学教育国際会議（ICMI Regional Conference：The Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education　）で発表する予定である．