

研究レポート

法 m のウェイト付きパスカル三角形のクラスターが作る模様の研究

畑 颯馬（津山工業高等専門学校2年）

1. はじめに（研究の動機）

本研究は、クラドニ図形[1]に興味をもったことから始まった。クラドニ図形は、白い粉を振りかけた金属板に、特定の周波数を与えて振動させたときに、白い粉が描く模様である。クラドニ図形は、振動元からの波と、板の端からの反射波の合成でできる定常波の振幅が最も小さいところ（節）に粉が集まるということで説明される。また、クラドニ図形の模様は一つだけでなく、板の形状や振動数を変えることで、様々な模様を作り出すことができる。このことから、私は、このような現象を数学の世界で作り出し、それらを研究できないかと考えた。

数学の世界での模様として、すぐに浮かんだものが、パスカル三角形である。パスカル三角形を法 2(以後 mod 2 という言い方もする)で考えると、シェルピンスキーのガasketというフラクタル図形が得られることが知られている。また、自然数の数列を法 m で考えると、鳩ノ巣原理から、周期性を持つことも証明できる。したがって、パスカル三角形を法 m で考えると、平面的に配置された 0 から $m-1$ までの数たちが、フラクタル図形のようなある種の周期性という構造をもつだろうと考えた。

また、クラドニ図形を作るには、板の中心から振動を与える必要があり、これをパスカル三角形の法 m で考えた図形に対比させると、頂点から隣り合った 2 つの数を足すというルールを与えることになる。さらに、クラドニ図形を生成する板の形状と周波数は、パスカル三角形の法 m で考えた図形を生成する法 m と数列の周期にそれぞれ対応すると考えることができる。そして、パスカル三角形を一般化したウエイト付きのパスカル三角形というものを定義し、それが作り出す模様を研究することで、本研究はより広がりを持ったものになるだろうと考えた。以上が、本研究を行うに至った動機である。

2. ウエイト付きパスカル三角形

ウエイト付きパスカル三角形を、エクセル上で、以下のように定義する[2].

定義 1.1. w を整数とする。 n 段目, m 列目のセルに入る数を $(n, m)^w$ で表す。ここで, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$ とする。さらに, $(n, 0)^w = 1$, $(0, n)^w = 1$ とする。その他の数は,

$$(n, i)^w = w \cdot (n-1, i-1)^w + (n-1, i)^w + (n, i-1)^w$$

とする。このルールで平面的に並べられた数の集合を, w の **ウエイト付きパスカル三角形** といい, $Pas(w)$ で表す。このとき, $Pas(0)$ は, パスカル三角形であることに注意する。

さらに, $Pas(w)$ を法 m で扱うときは, $Pas(w, m)$ と表し, **法 m のウエイト付きパスカル三角形** と呼ぶ。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0

$Pas(0, 2)$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
1	2	1	1	2	1	1	2	1	1
1	1	1	0	0	0	2	2	2	1
1	0	2	0	0	0	2	0	1	1
1	2	1	0	0	0	2	1	2	1
1	1	1	2	2	2	1	1	1	1
1	0	2	2	0	1	1	0	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

$Pas(1, 3)$

3. 法 m のウェイト付きパスカル三角形のクラスターの定義

法 m のウェイト付きパスカル三角形 $Pas(w, m)$ を見ると, 1つの同じ数字が固まって領域を作っていることをみることができる. 本研究では, この領域を $Pas(w, m)$ の**クラスター**と呼び, さらに, クラスターを作る1つの数を $Pas(w, m)$ の**支配数**と呼ぶことにする.

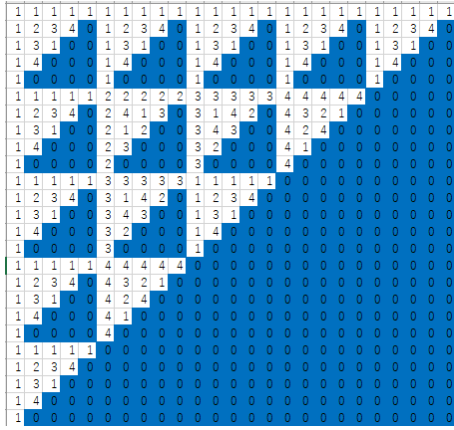


図 3.1 $Pas(0,5)$ のクラスター, 支配数は0

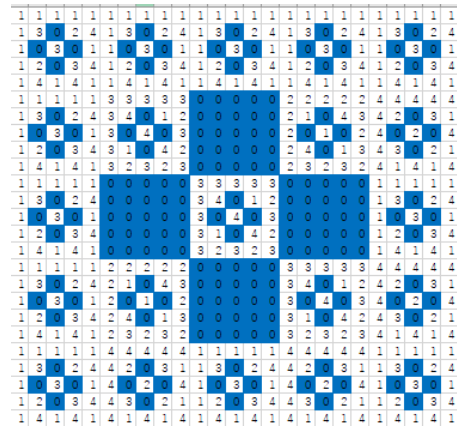


図 3.2 $Pas(6,5)$ のクラスター, 支配数は0

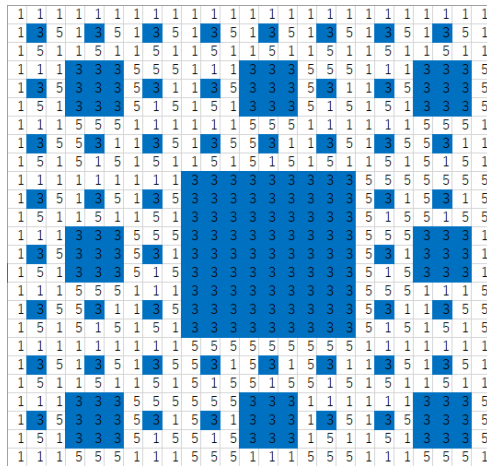


図 3.3 $Pas(1,6)$ のクラスター, 支配数は3

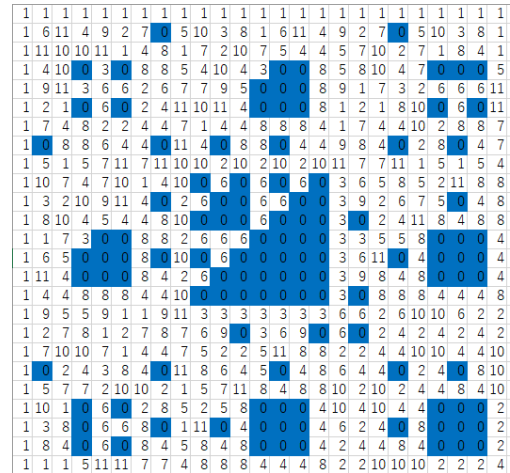


図 3.4 $Pas(4,12)$ のクラスター, 支配数は0

4. $Pas(w, m)$ のクラスターの支配数に関する調査

$Pas(w, m)$ のクラスターの支配数とクラスターの基本図形を, エクセルを使って $0 \leq w \leq 6$ の場合について調査した. クラスターの基本図形は, 以下の表 4.1 のタイプが見られる.

表 4.1 (クラスターの基本図形のタイプ)

タイプ	I	II	その他
クラスターが作る 基本図形			

研究結果 1. $0 \leq w \leq 6$ のときの $Pas(w, m)$ の支配数とクラスターの基本図形のタイプを調査した結果を、表 4.2 にまとめる.

表 4.2 ($0 \leq w \leq 6$ のときの $Pas(w, m)$ の支配数とクラスターの基本図形のタイプ)

$Pas(w, m)$ のタイプ	支配 数	条件	クラスターの基本図形のタイプ
$Pas(0, m)$	0		I
$Pas(1, m)$	0	m は奇数	II
	d	$m = 2d$, d は奇数	II
$Pas(2, m)$	0	$m \not\equiv 0 \pmod{3}$	I ($m = 2$) II (m : 奇数) その他 ($m \geq 4$ の偶数)
	nt	$m = 3n$, $t = \min\left(\frac{3k-1}{n}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$ $m \not\equiv 0 \pmod{9}$	I (n : 偶数) II (n : 奇数)
$Pas(3, m)$	0	m は奇数	II
	$\frac{e}{2}$	e を偶数で, $e \not\equiv 0 \pmod{4}$	I
	nt	$m = 4n$, $t = \min\left(\frac{4k-3}{n}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$ $m \not\equiv 0 \pmod{8}$	I ($m = 4, 9$) II ($m \geq 20$, $\frac{m}{4}$: 素数) その他 ($m \geq 36$, $\frac{m}{4}$: 合成数)
$Pas(4, m)$	0	$m \not\equiv 0 \pmod{5}$	I (m : 2 のべき乗) II (m : 奇数) その他 (m : 奇数と偶数の積)
	nt	$m = 5n$, $t = \min\left(\frac{5k-4}{n}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$ $m \not\equiv 0 \pmod{25}$	I ($m = 5, 10$) II ($m \geq 15$, $\frac{m}{4}$: 素数) その他 ($m \geq 36$, $\frac{m}{4}$: 合成数)
$Pas(5, m)$	0	m は 3 を除く奇素数	I ($m = 5$) II ($m \neq 5$)
	$n_1 t$	$m = 2n_1$, $t = \min\left(\frac{2k-1}{n_1}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$ $m \not\equiv 0 \pmod{6}, n_1 \not\equiv 0 \pmod{2}$	I ($m = 10$) II ($m \neq 10$)
	$n_2 t$	$m = 3n_2$, $t = \min\left(\frac{3k-2}{n_2}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$	I ($m = 15$) II ($m \neq 15$)

		$m \not\equiv 0 \pmod{6}, n_2 \not\equiv 0 \pmod{3}$	
	$n_3 t$	$m = 6n_3, t = \min\left(\frac{6k-5}{n_3}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$ $n_3 \not\equiv 0 \pmod{2}, n_3 \not\equiv 0 \pmod{3}$	I ($m = 30$) II ($m \neq 30$)
$Pas(6, m)$	0	$m \not\equiv 0 \pmod{7}$	I ($m = 2, 3, 6$) II (m は3以外の奇素数) その他 (m は6以外の合成数)
	nt	$m = 7n, t = \min\left(\frac{7k-6}{n}\right)$ は整数, $k = 1, 2, \dots$ $m \not\equiv 0 \pmod{49}$	I ($m = 14, 21, 42$) II ($m = 7 \times 5$ 以上の奇素数) その他 ()

5. $Pas(w, m)$ のクラスターが作る模様のフラクタル性

パスカル三角形の法2が作る図形 $Pas(0, 2)$ は、シェルピンスキーのガスケットと呼ばれるフラクタル図形（自己相似図形）に対応していることはよく知られている。本研究で扱っている法 m のウェイト付きのパスカル三角形 $Pas(w, m)$ のクラスターが作る模様もフラクタル図形となるものが多くみられる。



図 5.1 (生成図形)

以下の図 5.2 は、 $Pas(6, 5)$ の支配数0が作るクラスターが作る模様で、図 5.1 を生成図形として、それを拡大して得られるフラクタル模様となっている。

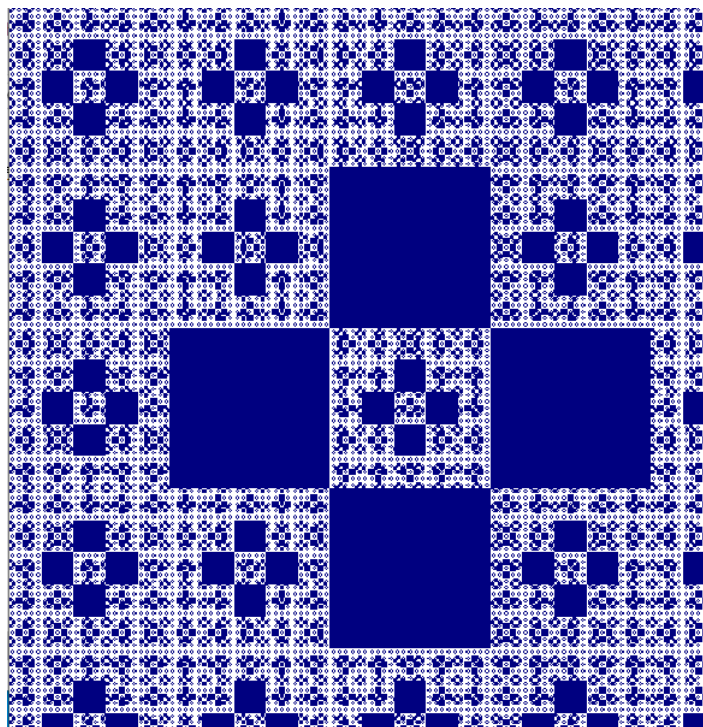


図 5.2 ($Pas(6, 5)$ の支配数0のクラスターが作る模様)

本研究では、 $Pas(w, m)$ のクラスターが作る模様のフラクタル構造を研究するために、クラスターが作る模様の生成図形をもとに、フラクタル次元による解析を行った。フラクタル次元の定義は以下である。

定義 5.1 Ω をフラクタル図形、 Ω の生成図形を1とする。 $\frac{1}{a}$ を縮小サイズ、 N をもとの構造全体を埋めるのに必要とされる自己相似図形の数とする。このとき、

$$D = \frac{\log N}{\log a}$$

を、 Ω のフラクタル次元という[3]。

たとえば、図 5.3 は、シェルピンスキーのガスケット $Pas(0, 2)$ であるが、 $a = 2, N = 3$ なので、フラクタル次元は、

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \sim 1.585$$



図 5.3 ($Pas(0, 2)$ のフラクタル模様)

$Pas(6, 5)$ の支配数 0 が作るフラクタル模様の生成について、 $a = 5, N = 21$ より

$$D = \frac{\log 21}{\log 5} \sim 1.892$$

となる。

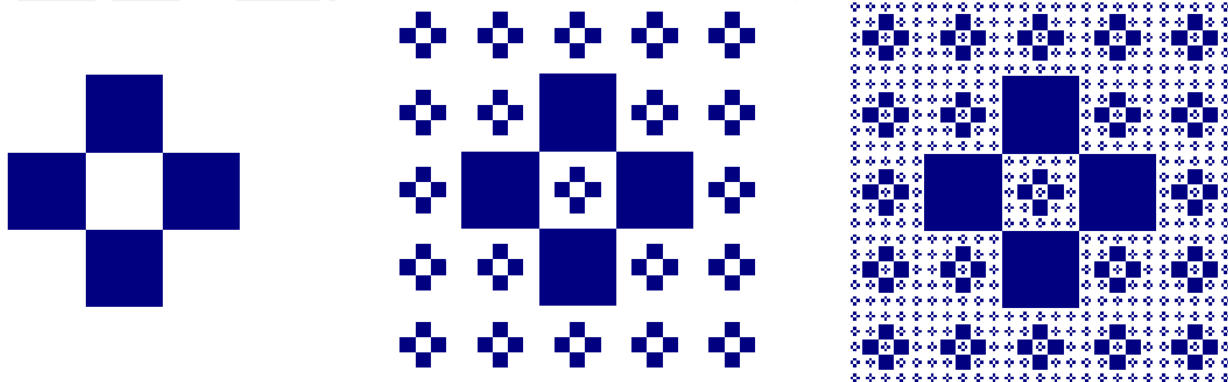
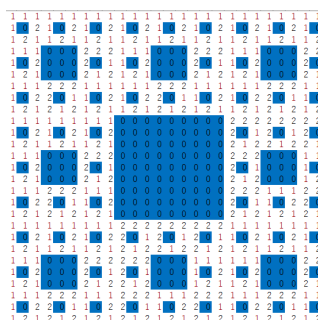


図 5.4 ($Pas(6, 5)$ の支配数 0 が作るフラクタル模様の様子)

5.1 $Pas(1, m)$ の支配数 0 が作るフラクタル模様

(1) $m = 3$ の場合

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$
 生成図形 (3×3)



生成図形 (3×3) は, 0 を 1 個含み, 生成図形の 3 倍は 9×9 のセルの作る図形である. このとき, 生成図形の支配数 0 は, 3×3 の支配数 0 のクラスターを作り, 単独な 0 の個数は 8 個である. 同様にして, 生成図形 (3×3) は, 3^n 倍, 順次拡大していく. このことから, フラクタル次元は, 縮小サイズが 3 で, もとの構造全体を埋めるのに必要とされる自己相似図形の数 $N = 3^2 - 1$ であることから,

$$D = \frac{\log N}{\log a} = \frac{\log(3^2 - 1)}{\log 3} \sim 1.893$$

となる.

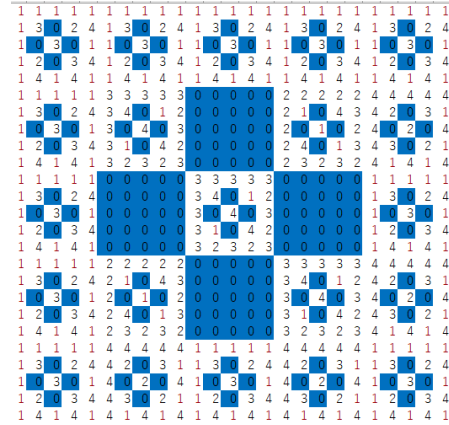
(2) $m = 5$ の場合

```

1 1 1 1 1
1 3 0 2 4
1 0 3 0 1
1 2 0 3 4
1 4 1 4 1

```

生成図形 (5×5)



生成図形 (5×5) は, 0 を 4 個含み, 生成図形の 5 倍は 25×25 のセルの作る図形である. このとき, 生成図形の 4 個の支配数 0 は, 5×5 のクラスターを 4 つ作る. 同様にして, 生成図形 (5×5) は, 5^n 倍, 順次拡大していく. このことから, フラクタル次元は, 縮小サイズが 5 で, もとの構造全体を埋めるのに必要とされる自己相似図形の数 $N = 5^2 - 4$ であることから,

$$D = \frac{\log N}{\log a} = \frac{\log(5^2 - 4)}{\log 5} \sim 1.892$$

となる.

以上のような調査を行い, m が素数 p のとき, 生成図形は $p \times p$ であることがわかった. そして, 生成図形 $p \times p$ の中にある 0 の個数 $a(w, p)$ がフラクタル次元に重要であることがわかったため, $a(w, p)$ について調べた結果, $a(w, p)$ を w に関する数列 $a(1, p)$, $a(2, p)$, $\dots$ と考えると, $a(w, p)$ は周期 p をもつ数列であることがわかった. 具体的な周期するデータは以下である.

$p = 3$ のときの数列 $\{a(w, 3)\}$ の周期は 3 で, その数列は,

1, 0, 3

$p = 5$ のときの数列 $\{a(w, 5)\}$ の周期は 5 で, その数列は,

4, 2, 2, 0, 10

$p = 7$ のときの数列 $\{a(w, 7)\}$ の周期は 7 で, その数列は,

5, 4, 3, 4, 3, 0, 21

$p = 11$ のときの数列 $\{a(w, 11)\}$ の周期は 11 で, その数列は,

9, 10, 8, 8, 5, 10, 10, 10, 5, 0, 55

$p = 13$ のときの数列 $\{a(w, 13)\}$ の周期は 13 で, その数列は,

16, 4, 4, 8, 12, 12, 4, 12, 4, 8, 12, 0, 78

$p = 17$ のときの数列 $\{a(w, 17)\}$ の周期は 17 で、その数列は、

28, 10, 22, 8, 18, 22, 18, 18, 10, 10, 12, 10, 8, 12, 18, 0, 136

$p = 19$ のときの数列 $\{a(w, 19)\}$ の周期は 19 で、その数列は、

17, 14, 20, 10, 10, 18, 4, 16, 21, 14, 4, 16, 20, 14, 14, 18, 21, 0, 171

$p = 23$ のときの数列 $\{a(w, 23)\}$ の周期は 23 で、その数列は、

29, 25, 12, 18, 24, 18, 21, 12, 18, 21, 27, 25, 20, 24, 21, 20, 20, 18, 20, 21, 28, 0, 253

以上のことから、以下の研究結果 2 を得た。

研究結果 2. p を奇素数とし、 $Pas(w, p)$ の支配数とクラスターの模様のフラクタル次元を調査した。その結果、以下の 4 つの予想を得た。

予想 1. フラクタル模様の生成図形は $p \times p$ のセルの領域にある支配数 0 で構成され、フラクタル次元 D は、

$$D = \frac{\log(p^2 - a(w, p))}{\log p}$$

である。ここで、 $a(w, p)$ は $Pas(w, p)$ のフラクタル模様の生成図形 $p \times p$ のセルに現れる 0 の個数を表す。

予想 2. $a(w, p)$ は w に関して周期性があり、

$$a(w, p) \equiv a(w + p, p) \pmod{p}$$

が成り立つ。

予想 3. $w + 1 = p$ のとき、 $a(w, p) = 0$ である。

予想 4.

$$a(p, p) = \frac{p(p-1)}{2}$$

注意! m を合成数としたとき、 $Pas(w, m)$ はフラクタル模様を作るが、それらを一般的に扱うことは難しく、今後の研究課題としている。

6. $Pas(w, m)$ のフラクタル性の証明

$Pas(w, m)$ のフラクタル性を証明した。そのために、まず、以下の定理を発見し、証明した。

定理 1. $Pas(w, p)$ を四角形に並べて、上から n 段、 j 列の数を $(n, j)^w$ と置くと、

$$(n, j)^w = \sum_{k=0}^j w^{j-k} \cdot {}_j C_k \cdot {}_{n+k} C_j$$

となる。ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots, n$ である。ただし、 $x < y$ のとき ${}_x C_y = 0$ とする。

証明の概略. ページ数の関係で、概略だけ述べる。証明は数学的帰納法を使う。途中式で、二項定理の公式 ${}_j C_{k-1} + {}_{j-1} C_k = {}_j C_k$ を使い整理することで証明できる。(証明の概略終)

例えば, $w = 1$ のときは,

$$(n, j)^1 = \sum_{k=0}^j {}_j C_k \cdot {}_{n+k} C_j$$

であり,

$$\begin{aligned} (0,0)^1 &= {}_0 C_0 \cdot {}_0 C_0 = 1, & (0,1)^1 &= \sum_{k=0}^1 {}_1 C_k \cdot {}_k C_1 = 1, & (0,2)^1 &= \sum_{k=0}^2 {}_2 C_k \cdot {}_k C_2 = 1, \dots \\ (1,0)^1 &= {}_0 C_0 \cdot {}_1 C_0 = 1, & (1,1)^1 &= \sum_{k=0}^1 {}_1 C_k \cdot {}_{1+k} C_1 = 3, & (1,2)^1 &= \sum_{k=0}^2 {}_2 C_k \cdot {}_{1+k} C_2 = 5, \dots \\ (2,0)^1 &= {}_0 C_0 \cdot {}_2 C_0 = 1, & (2,1)^1 &= \sum_{k=0}^1 {}_1 C_k \cdot {}_{2+k} C_1 = 5, & (2,2)^1 &= \sum_{k=0}^2 {}_2 C_k \cdot {}_{2+k} C_2 = 13, \dots \end{aligned}$$

以上のような計算から, $Pas(1, p)$ が得られる.

1	1	1	1	1	1	1
1	3	5	7	9	11	13
1	5	13	25	41	61	85
1	7	25	63	129	231	377
1	9	41	129	321	681	1289
1	11	61	231	681	1683	3653
1	13	85	377	1289	3653	8989

次に, 以下の 2 つの補題を証明した.

補題 1. $h, n \geq 1$ を整数, p を素数とする. このとき, $u = 0, 1, 2, \dots, p^n - 1$ に対し $T_h(u) = {}_{hp^n+u} C_{p^n} \pmod{p}$ は, 同じ値をとる.

証明.

$$T_h(u) = {}_{hp^n+u} C_{p^n} = \frac{(hp^n + u)(hp^n + u - 1) \cdots (hp^n + u - (p^n - 1))}{p^n!}$$

である. $0 \leq u \leq p - 2$ とする.

$$\begin{aligned} T_h(u+1) - T_h(u) &= \frac{(hp^n + u + 1)(hp^n + u) \cdots (hp^n + u - (p^n - 2))}{p^n!} - \frac{(hp^n + u)(hp^n + u - 1) \cdots (hp^n + u - (p^n - 1))}{p^n!} \\ &= \frac{(hp^n + u)(hp^n + u - 1) \cdots (hp^n + u - (p^n - 2))}{p^n!} \{(hp^n + u + 1) - (hp^n + u - (p^n - 1))\} \\ &= \frac{(hp^n + u)(hp^n + u - 1) \cdots (hp^n + u - (p^n - 2))}{(p^n - 1)!} \end{aligned}$$

右辺は整数で $hp^n + u \geq p$ より,

$$T_h(u+1) - T_h(u) \equiv 0 \pmod{p}$$

である. (証明終)

$T_h(u)$ の定義式から、以下の補題が成り立つ。

補題 2. $h \equiv h' \pmod{p}$ ならば、 $T_h(u) \equiv T_{h'}(u) \pmod{p}$ である。

上記の 2 つの補題から、 $Pas(w, m)$ のフラクタル性に関する次の定理を証明した。

定理 2. $h \geq 1, k \geq 1, n \geq 1, m \geq 1$ を整数、 p を素数とする。このとき、 $u = 0, 1, 2, \dots, p^n - 1$ に対し $Pas(w, p)$ の

$$(hp^n + u, kp^m)^w \pmod{p}$$

は同じ値をとる。さらに、 $h \equiv h' \pmod{p}$ 、 $k \equiv k' \pmod{p}$ ならば、

$$(hp^n + u, kp^m)^w \equiv (h'p^n + u, k'p^m)^w \pmod{p}$$

すなわち、周期的である。 $h \equiv 0 \pmod{p}$ のときは、 $(u, kp^m)^w \equiv (kp^m, u)^w \equiv 1 \pmod{p}$ である。

証明. $(u, p)^w$ について考える。 $k = 1, 2, \dots, p-1$ ならば ${}_pC_k \equiv 0 \pmod{p}$ なので、定理 1 より

$$\begin{aligned} (u, p^m)^w &= \sum_{k=0}^p w^{p-k} {}_pC_k {}_u C_{u+k} C_{p^m} \\ &\equiv w^p {}_u C_{p^m} + w^0 {}_{u+p} C_{p^m} \equiv w {}_u C_{p^m} + {}_{p^m+u} C_{p^m} \pmod{p} \end{aligned} \quad (6.1)$$

補題 1 より、 $u = 0, 1, 2, \dots, p-1$ に対し ${}_{hp^m+u} C_{p^m} \pmod{p}$ は、同じ値をとるので、(6.1)より

$(hp^n + u, p^m)^w \pmod{p}$ も同じ値をとる。さらに、 $h \equiv h' \pmod{p}$ ならば、

$$(hp^n + u, p^m)^w \equiv (h'p^n + u, p^m)^w \pmod{p}$$

であることは、補題 2 から明らかである。

$h \equiv 0 \pmod{p}$ のときは

$$\begin{aligned} (hp^n + u, p^m)^w &\equiv (u, p^m)^w \equiv w {}_u C_{p^m} + {}_{p^m+u} C_{p^m} \equiv {}_{p^m+u} C_{p^m} \equiv \frac{(p^m + u)(p^m + u - 1) \cdots (p^m + 1)}{u!} \\ &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

である。(証明終)

(例) 以下は、 $Pas(8, 5)$ の様子を表したものである。 $k = 0, 1, 2, \dots$ のときの $5k$ 段目 ($5k$ 列目) に、同じ数字が5個続いて並ぶことがわかる。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0
2	1	4	3	3	4	1	4	3	3	4	1	4	3	3	4	1	4
3	1	3	3	0	3	1	3	3	0	3	1	3	3	0	3	1	3
4	1	2	4	3	1	1	2	4	3	1	1	2	4	3	1	1	2
5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	3	3
6	1	0	4	3	2	0	0	0	0	0	4	0	1	2	3	3	0
7	1	4	3	3	4	0	0	0	0	0	4	1	2	2	1	3	2
8	1	3	3	0	3	0	0	0	0	0	4	2	2	0	2	3	4
9	1	2	4	3	1	0	0	0	0	0	4	3	1	2	4	3	1
10	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
11	1	0	4	3	2	4	0	1	2	3	3	0	2	4	1	3	0
12	1	4	3	3	4	4	1	2	2	1	3	2	4	4	2	3	2
13	1	3	3	0	3	4	2	2	0	2	3	4	4	0	4	3	4
14	1	2	4	3	1	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	3	1
15	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0
16	1	0	4	3	2	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	0	0

図 6.1 $Pas(8,5)$

最後に, $Pas(w, m)$ がフラクタル性をもつことを証明する. フラクタル性の意味を $Pas(8, 5)$ の図 6.1 で説明すると, 例えば, セル(5,10)とセル(9,14)で囲まれた四角形の中の数字は, セル(0,0)とセル(4,4)で囲まれた四角形の数字の4倍になっているということである. ここで4倍することはセル(5,10)の値に対応する.

定理 3. $h \geq 0, k \geq 0, n \geq 1, m \geq 1$ を整数, p を素数, $u = 0, 1, 2, \dots, p^n - 1, j = 0, 1, 2, \dots, p^n - 1$, さらに, $(hp^n, kp^m)^w \equiv a \pmod{p}$ とする. このとき,

$$(hp^n + u, kp^m + j)^w \equiv a \cdot (u, j)^w \pmod{p}$$

$$(up^n, jp^m)^w \equiv (u - 1, j - 1)^w \pmod{p}$$

が成り立ち, さらに, $Pas(w, p)$ の支配数は 0 である.

証明. (1) $(hp^n + u, kp^m + j)^w \equiv a \cdot (u, j)^w \pmod{p}$ を示す. そのために, h, k, n, m と p を固定して, 数学的帰納法で示す. $u = 1, j = 1$ のとき, $a_1 S_1^{(w)} \equiv a(w + 2) \pmod{p}$ であり

$$(hp^n + 1, 1)^w \equiv w \cdot (hp^n, 0)^w + (hp^n + 1, 0)^w + (hp^n, 1)^w \equiv wa + a + a \equiv (w + 2)a \pmod{p}$$

より正しい.

$hp^n + u - 1$ 段目は成立し, $hp^n + u$ 段目, $kp^m + j - 1$ 列目まで成立していると仮定する. このとき,

$$a \cdot (u, j)^w \equiv a(w \cdot (u - 1, j - 1)^w + (u, j - 1)^w + (u - 1, j)^w) \pmod{p}$$

であり,

$$\begin{aligned} (hp^n + u, kp^m + j)^w &\equiv w \cdot (hp^n + u - 1, kp^m + j - 1)^w + (hp^n + u, kp^m + j - 1)^w + (hp^n + u - 1, kp^m + j)^w \\ &\equiv wa \cdot (u - 1, j - 1)^w + a \cdot (u, j - 1)^w + (u - 1, j)^w \\ &\equiv a \cdot (u, j)^w \pmod{p} \end{aligned}$$

次に, $(up^n, jp^m)^w \equiv (u - 1, j - 1)^w \pmod{p}$ を示す. $(u, j)^w$ は定義を用いて計算しておく. 定理 1 より, $(p - 1, p - 1)^w \equiv 1 \pmod{p}$ であり, また, 定理 2 より $(p, p - 1) \equiv (p - 1, p)^w \equiv 1 \pmod{p}$ であることに注意する. $n = m = 1$ のとき,

$$(p, p)^w \equiv w \cdot (p - 1, p - 1)^w + (p, p - 1)^w + (p - 1, p)^w \equiv (1, 1)^w \pmod{p}$$

up 段目の $(up, jp)^w$ まで成立していると仮定する. 定理 2 より

$$\begin{aligned}(up, (j+1)p)^w &= w \cdot (up-1, (j+1)p-1)^w + (up, (j+1)p-1)^w + (up-1, (j+1)p)^w \pmod{p} \\ &\equiv w \cdot (u-1, j-1)^w + (u, j-1)^w + (u-1, j+1)^w \equiv (u, j+1)^w \pmod{p}\end{aligned}$$

したがって, 定理は証明された. (証明終)

7. 今後の研究について

今回の研究は, クラドニ図形への興味からスタートした. しかし, 自分の数学的知識ではクラドニ図形の数理モデルを考えることは難しいと感じた. そこで数学クラブの先輩の研究[2]であるウェイト付きパスカル三角形が作る図形の研究にヒントがあると考え, この研究に没頭した. そして, 研究対象の図形の中に, 周期性やフラクタル性という数学的な性質があることを見つけ, 証明することができた.

現在, クラドニ図形も, 振動の周期性やフラクタル性に関係するのではと考えている. 今回は, 微分方程式に関する知識がなかったので, そこまで踏み込んで研究することはできなかったが, 今後, 微分方程式から空間の時間的な変化を設定し, セルオートマトンなどを使ってクラドニ図形の数理モデルを作ることを目指したいと考えている.

参考文献

- [1] 振動が描く不思議な模様～クラドニ図形を見てみよう, https://www.mirai-kougaku.jp/laboratory/pages/181012_03.php
- [2] 藪中悠貴, パスカル三角形の変形について, 2009 年, 津山高専数学クラブ, <https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/pascal.pdf>
- [3] フラクタル次元, <https://ja.wikipedia.org/wiki/フラクタル次元>