

虚数の整数の研究

—偶奇性を使った魅力的応用の創造—

津山高専・数学クラブ 情報工学科 2 年

末田 卓巳 , 橘 智子

研究の動機

毎週木曜日の数学クラブの「数学カフェ」にて、
「虚数整数にも偶数や奇数はあるのではないか？」
「あるとしたら、それはどのようなものか？」
という議題があがった。



“2”を複素数の範囲で因数分解すると...

$$2 = (1+i)(1-i)$$

結果、

偶数: $(1+i)$ の倍数

奇数: それ以外

ということが定義できる。

研究の動機(偶数と奇数)

偶奇性

1. 偶数+偶数=偶数
2. 奇数+奇数=偶数
3. 偶数+奇数=奇数
4. 偶数×偶数=偶数
5. 奇数×奇数=奇数
6. 偶数×奇数=偶数

有用な補題

- (1) $a+bi$ が偶数
 $\Leftrightarrow a+b$ が偶数
- (2) $a+bi$ が奇数
 $\Leftrightarrow a+b$ が奇数

我々の定義した複素数の偶数と奇数は完全に上の偶奇性をみたす。

偶奇性の魅力的応用への手がかり

(挑戦1) 自然数の偶奇性を使った有名な予想に
「コラッツ予想」がある.



コラッツ予想の複素数バージョンをつくろう！！
(末田 担当)

(挑戦2) 自然数の偶奇性からピタゴラス数の
パラメータ表示が得られる.



複素ピタゴラス数のパラメータ表示を与えよう！！
(橘 担当)

我々の結論

(応用1) 我々が定義した変換(末田変換)により
驚くべき**複素バージョンのコラッツ予想**
をうちたてることに成功した.
「どんな複素数も末田変換により,
複素平面上の14個の点で作る
「手裏剣」の形になる」



(応用2) 複素ピタゴラス数のパラメータ表示に関する問題は,
すでに解決していた(1986年).
そこで, この結果を利用し, さらに自然数のピタゴラ
ス変換理論を複素数に導入することで, **複素ピタゴラ
スの構造**(複素ピタゴラス生態系とでもいうべきもの)
をつきとめ, いくつかのクラスに分類する方向性を見
出した.

応用1

～ 複素数バージョンのコラッツ予想 ～
末田卓巳

研究の経緯(1)

虚数整数で奇数と偶数があるということは、
コラッツ予想にも当てはめられるのではないか？

言い換えると

コラッツ予想であらゆる整数が
1に収束するように、
虚数においても何かに収束するのではないか？
・・・と予想を立てた。

コラッツ予想とは？

自然数 x に対して, x が
偶数なら 2 で割る
奇数なら 3倍し1を足す

何度もすると

どんな自然数でも最終的に
1に収束する

コラッツ予想の虚数整数への拡張(1)

当初、コラッツ予想を以下のように拡張、
C言語でプログラムを作成した:

複素数 $(a + bi)$ があり、それが
偶数なら $(1+i)$ で割る
奇数なら $(2+i)$ 倍し 1 を足す
※ $(1+i)$ を**除算定数**、
 $(2+i)$ を**乗算定数**と呼ぶ。
 a, b は整数。

しかし、除算定数や乗算定数をどういう風に変えても
発散してしまい、期待通りにはいかなかった・・・。

コラッツ予想の虚数整数への拡張(2)

そこで!! ルールを少し変更することにした:

奇数なら $(2+i)$ 倍し $(b+ai)$ を足す

例. $(2+3i) \rightarrow (2+i)(2+3i) + (3+2i) = (4+10i)$



最終的にいくつかの数をループする
数値的現象が起こった!!

計算結果の可視化

数値的データの出力だけでは直感的に状況が把握できない。

そこで、ループに至るまでのステップを描画するプログラムを作成した。

コラッツ計算プログラム:

言語: C++言語

開発環境: BCC Developer 1.2.21

コンパイラ: Borland C++ Compiler 5.5.1

実行時パラメータにて a, b の値を指定し、それを初項として計算。
結果はプレーンテキストで出力。
下記描画プログラムと連携動作。

結果描画プログラム:

言語: HSP言語

開発環境: HSP 3.3β

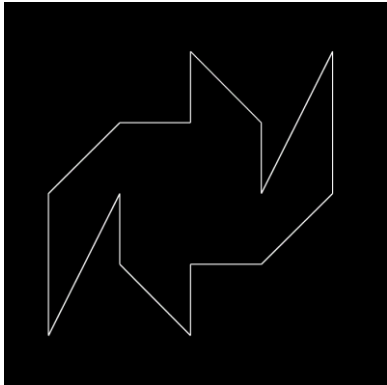
描画メソッド: GDI+ with Artlet2D module

上記のフロントエンドとして動作。
 a, b の値を入力してボタンをクリックすると上記を呼び出し、結果を読み込んだ上で描画開始。
マウスで直感的に操作できる。

驚きの結果

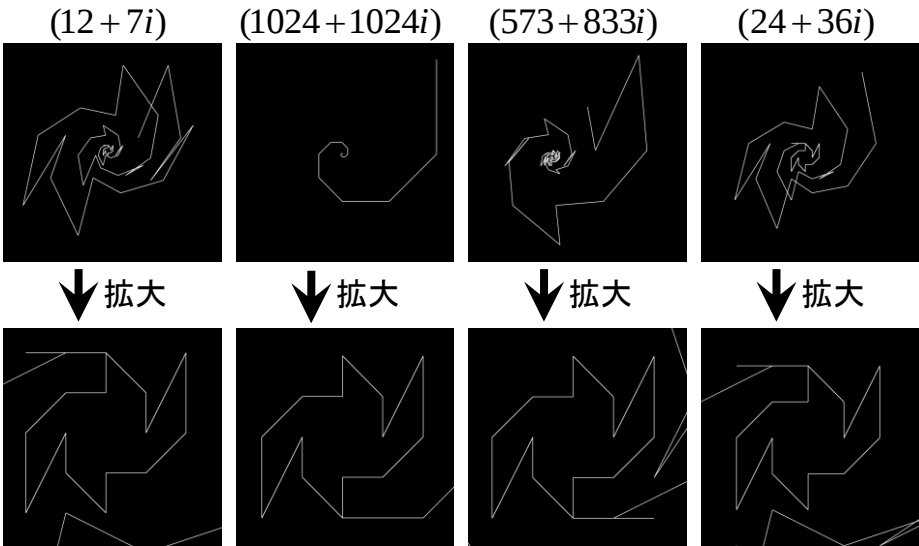
さまざまな複素数を入力して結果を見ると、最終的に、つねに以下の14個の点からなる図形を描いて収束している事が判明した。

※ a を x 軸、 b を y 軸の値としている



形状から、
我々はこれを
「手裏剣」
と呼ぶことにした。

驚きの結果(2) 以下はいくつかの例である。
すべて手裏剣に行き着いている事がわかる。



気づいた特徴

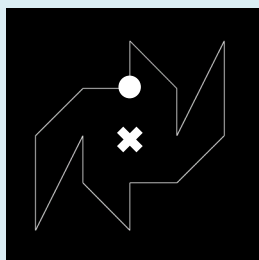
いろいろな整数から手裏剣に収束する様子を観察していると、**いくつかの特徴**に気付いた。

- 少なくとも試した範囲では、 a と b にどのような数字を指定しても必ず手裏剣のループに入る。
- それぞれの手裏剣は合同ではなく**相似**である。
- a と b に 2^n の数を設定すると、らせんを描いて中心に向かっていく。
- ループに入る以前にも手裏剣に**よく似た図形が現れる**ことがある。
- ループに入るときはたいてい手裏剣の中心の真上か真下であるが、**例外も存在する**。
- a と b が両方偶数である場合は比較的素早く収束する。

手裏剣の「大きさ」

すべての手裏剣は相似している、ということに気付いた我々は、「初期値に対して手裏剣の大きさはどのようなのか」について調べることにした。

“大きさ”の定義



原点(バツ印)に最も近い点(白い点)の**原点からの距離**を、手裏剣の大きさとする。

この定義を基に、先ほどの計算プログラムに改造を加え、初期値がどの大きさの手裏剣に収束するか表示させるようにした。

大きさの幾何学的統計

$x = a$ 、 $y = b$ とし、対応する各点を初期値として収束する手裏剣の大きさを算出、CSVファイルに出力するプログラムを作成した。
描画にはMicrosoft Excelを用いる。

大きさ算出プログラム

言語 : C++言語

開発環境 : Microsoft Visual C++ 2010

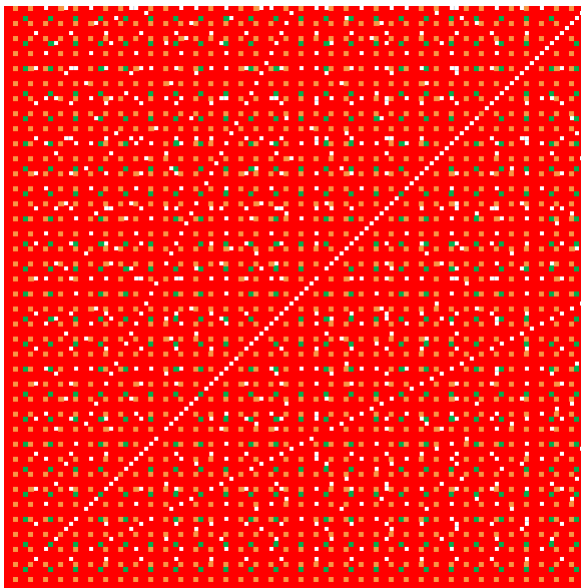
コンパイラ : 同上

aとbの範囲を与えられると、その範囲内の各点における手裏剣の大きさをCSVファイルに出力する。

最新バージョンでは、大きく改造を加えた上にコンパイラも変更し、高速化した。

最初のバージョンは10x10の範囲の出力に16秒もかかっていたが、改良を重ねた結果100x100の範囲を2秒強で計算できるようになった。

「手裏剣の大きさ」の表示による分布状況



左図はプログラムにより算出し、各点に収束する手裏剣の大きさを表示させ、Excelにて色分けしたものである。

赤 = 1

橙 = 3

緑 = 5

白 = 7以上

となっている。

手裏剣の大きさの分布図から気づいた特徴

大きさを色別に分けた図からも、
いくつかの特徴を見付け出すことができた。

- “1”が非常に多い。
- 大きさが偶数のものが存在しない。
- x, y 両軸において、3の倍数の座標に”3”が、5の倍数の座標に”5”がある。それ以上も同様。
- $y=x$ の線上にある点の大きさが、他の部分に比べて大きい。

手裏剣の大きさに関する予想

- x 座標、 y 座標のどちらも偶数であれば、大きさは常に ”1”となる。
- x 座標、 y 座標のどちらかが奇数なら
 x と y の最大公約数 が手裏剣の大きさとなる。

展望

- 大きさ算出プログラムを複数のPCを用いて**並列化・高速化**し、より多くのデータを収集、**予想の正しさを保証**する
- 大きさに関する予想から作成した表と、実際の分布図との**比較・検証**
- さらなる**法則性の発見**
- **なぜ手裏剣になるのか**，の考察
- 手裏剣を構成する点の特徴

応用2

～複素ピタゴラス数について～

担当:橘 智子

研究の動機

1. 先輩達のピタゴラス数の研究を行っていて、
相談の中から、偶奇性の応用へのヒントを得た。

2. ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は s, t をパラメータとして

$$x = s^2 - t^2, \quad y = 2st, \quad z = s^2 + t^2 \quad \cdots (1)$$

ただし s と t はどちらか一方は偶数、他方が奇数である。
すなわちパラメータには偶数と奇数が大きな意味を持つ。

3. 複素数にピタゴラス数を拡張して考える。
4. 以後、複素数のピタゴラス数をCPNとする。

5. (1)から得られるCPN $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と(1)以外のものが

あるかどうか、プログラムを組んで調査をした。

6. その結果CPNには(1)以外から得られるものがあることがわかった。
7. しかし、このことについては8月に数学の
専門家からも「統一的パラメータが存在する
のではず」という意見をもらった。
8. それを解決するために論文調査を行った。

9. その結果「Primitive Pythagorean Triples of Gaussian Integers, JAMES. T. Cross, MATHEMATICS MAGAZINE. VOL. 59, NO. 2, APRIL 1986」を発見した.
10. そこには $(1+i)$ 倍のクラス(偶数)とそれ以外のクラス(奇数)から導出されたCPNのパラメータ表示に関する結果があった.

$$\begin{pmatrix} (v^2 + w^2)/2 \\ (v^2 + w^2)/2i \\ vw \end{pmatrix}$$

ただし, v と w は奇数で互いに素とする.

(例) $v = 3 + 2i, w = 2 + i$ のとき, $\begin{pmatrix} 4 + 8i \\ 4 - i \\ 4 + 7i \end{pmatrix}$

動機まとめ

以上より, 複素ピタゴラス数CPNのパラメータ表示は複素数の偶奇性に深く関係していることがわかった.



したがって, CPNの研究は複素数の偶奇性の応用として意味があるものと考えた.

研究手法

- 先輩達は一昨年ピタゴラス変換によるピタゴラス数の研究を行った.
- 私たちも, ピタゴラス変換でCPNがどのようになっているのか研究することにした.

- CPNであつかう数は

$a+bi$, ただし $a \geq 0$ かつ $a=b=0$ は除く.

参考1 「ピタゴラスを生み出す行列のはなし」
小林吹代, ペレ出版

参考2 「k-ピタゴラス数の代数と幾何学」
菅原, 野山, 草地 (津山高専), JSEC2009

ピタゴラス変換 (これまで知られていること)

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

を, ピタゴラス数生成行列という.

$$\square \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \boxed{\text{長男}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \boxed{\text{次男}}$$

$$\square \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \boxed{\text{三男}}$$

(特徴1) ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の3つの分身を

作り, それに G を作用させると, 新しいピタゴラス数の三兄弟が生まれる。

(特徴2). $G^2 = E$ (単位行列)

(特徴3) G にピタゴラス数を作用させ、
得られたベクトルの各成分を正に変えたものは、
またピタゴラス数で、それを先祖と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} \text{先} \\ \text{祖} \end{pmatrix}$$

自然数における ピタゴラス変換の既知の結果

ピタゴラス変換によって、 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ からすべての
ピタゴラス数が生まれる. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ を始祖と呼ぶ.

問題提起

自然数のピタゴラス数
には始祖が存在した.
複素ピタゴラス数CPNで
も始祖が存在するだろう
か.

複素ピタゴラス数CPNの調査研究

1. パラメータからCPNのリストを出す.
2. CPNのリストにG行列を作用させて,
始祖を調べる.
3. CPNのリストから3つの分身をそれぞれ
作り, 3兄弟と子孫の系列を調べる.

* 調査研究は, フリーソフト十進BASICを用いて, 自作プログラムにより行った.

研究から得られた概念の整理

定義 1 (親, 先祖)

$\mathbf{P}$ がCPNのとき $G\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ で, $\mathbf{P}'$ の各成分の実部を正に変えて作った $\mathbf{P}'_1$ を $\mathbf{P}$ の親といい, これを $G\mathbf{P} = \mathbf{P}'_1$ で表す.

さらに, ある n が存在して, $G^n \mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ であるとき, $\mathbf{P}_1$ は $\mathbf{P}$ の先祖であるという.

定義 2 (相対始祖)

$\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{P}_2$ が相対始祖であるとは, $\mathbf{P}_1$ が $\mathbf{P}_2$ の先祖で, かつ, $\mathbf{P}_2$ も $\mathbf{P}_1$ の先祖であるときをいう.

定義 3 (始祖)

$\mathbf{P}$ が始祖であるとは $\mathbf{P}$ に親が存在しないときをいう。
特に，始祖は相対始祖である。

定義 4 (従属的，独立的)

$\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{P}_2$ が相対始祖であって，かつ $\mathbf{P}_1$ が $\mathbf{P}_2$ の息子，
あるいは $\mathbf{P}_2$ が $\mathbf{P}_1$ の息子であるとき $\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{P}_2$ は
従属的である という。
従属的でないときを，独立的である という。

研究結果

定理

$\mathbf{P}$ を CPN とすると， $\mathbf{P}$ には相対始祖が存在する。
特に， $\mathbf{P}$ が自然数ならば $\mathbf{P}$ は始祖をもち，

それは $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ である。

予想

$\mathbf{P}$ の成分が虚数ならば，始祖は存在しない。

今後の研究課題

独立的相对始祖の特徴は？

従属的相对始祖の特徴は？

混在的相对始祖の特徴は？

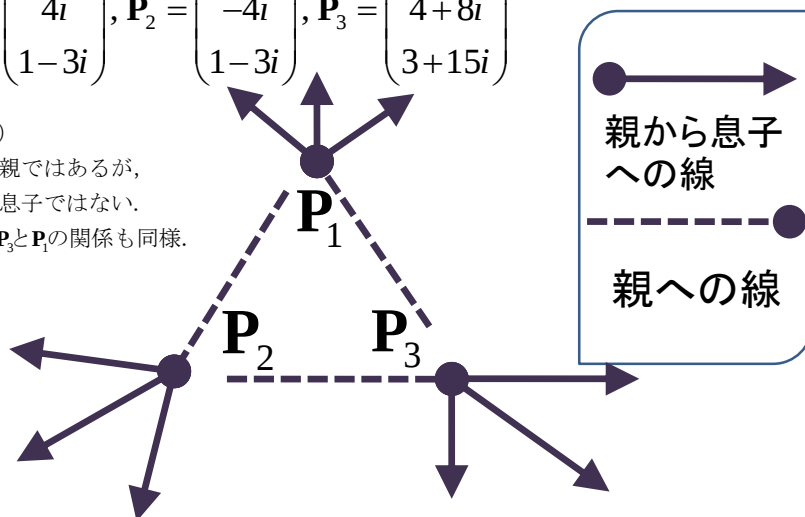
独立的相对始祖グループの例

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 4i \\ 1-3i \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ -4i \\ 1-3i \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1+13i \\ 4+8i \\ 3+15i \end{pmatrix}$$

(注意！)

$\mathbf{P}_2$ は $\mathbf{P}_1$ の親ではあるが、
 $\mathbf{P}_1$ は $\mathbf{P}_2$ の息子ではない。
 $\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{P}_3$ 、 $\mathbf{P}_3$ と $\mathbf{P}_1$ の関係も同様。

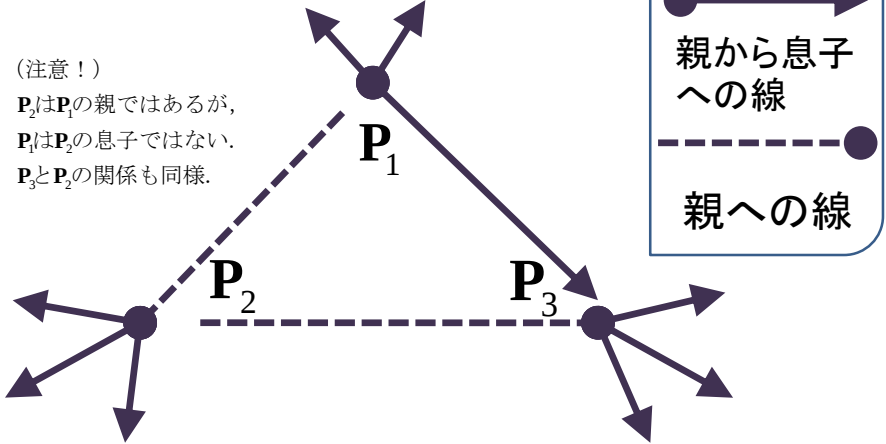
。



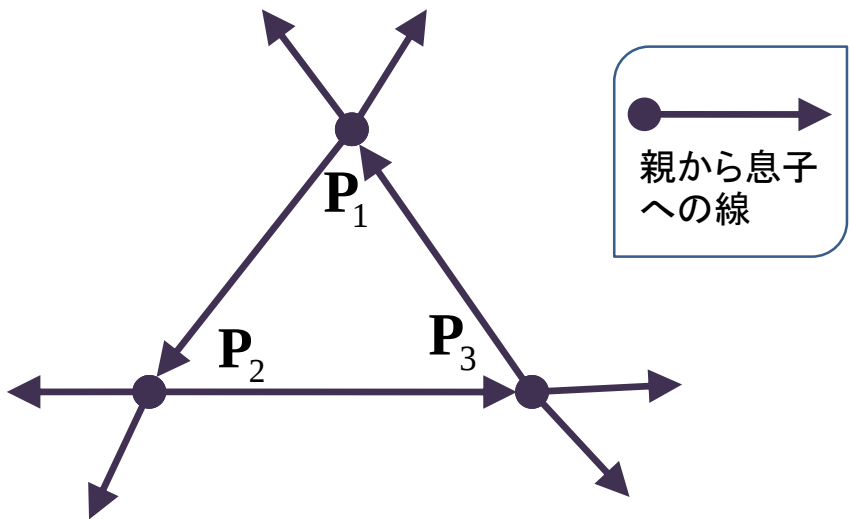
混在的相対始祖グループの例

$$P_1 = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 2+6i \\ 5i \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 8+5i \\ 10+2i \\ 12+3i \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 8+25i \\ 10+22i \\ 12+33i \end{pmatrix}$$

(注意！)
 P_2 は P_1 の親ではあるが、
 P_1 は P_2 の息子ではない。
 P_3 と P_2 の関係も同様。



従属的始祖グループの予想される型



* 現在の研究において、このタイプは見つかっていない。