

n 次元ファレイ空間の結晶理論

赤松昌俊, 小林祐志(津山高専 3 年)

1. はじめに

私達はファレイ数列の構成法と既約性に興味を持ち、ファレイ数列について調べていくなかで、“神経回路モデルのカオス” [1] という本に出会った。その本では、ファレイ数列を用いた単独ニューロンモデルの理論が書かれてあった。そして、実際の複雑な生命現象のモデル化へのファレイ数列によるアプローチはとても刺激的であった。私達はファレイ数列の理論の大きな可能性を感じたため、ファレイ数列の高次元理論を構築することで、将来の科学の数理基礎の一つを提示できるのではないかと考えた。以上のことから「**ファレイの既約分数理論を高次元化する**」これが私達の目標となった。

ファレイの既約分数理論とは 2 つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし、それらの分子同士、分母同士をそれぞれ足し算して次の既約分数をつくり、この操作をくり返して 0 と 1 の間のすべての既約分数を生み出すものである。より具体的には、ステップ 0 のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ とする。ステップ 1 のファレイ数列は $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ を加えた $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ である。ステップ 2 以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ、隣り合った 2 つの分数から新しい分数を上の演算で作っていく。したがって、ステップ 2 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ で、ステップ 3 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$ というようになる。そして、この操作を無限に繰り返すことで全ての既約分数が生まれるのである。

私達は、既約分数 $\frac{a}{b}$ ($a > 0, b > 0$) を、分数ではなく点 (a, b) と考えることで、その研究対象を n 個の自然数からなる既約点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に拡張した。この点を **n 次元ファレイ点** と呼び、 n 次元ファレイ点全体を **n 次元ファレイ空間** と呼んだ (§ 2 参照)。そして、ファレイの既約分数理論のような n 次元ファレイ点の理論構築と、それをもとにファレイ点の数学的構造を幾何学的に研究することを目標とした。

昨年度(平成 25 年度)は、 $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$ を初期値とし、3 次元のファレイ理論研究を、重心分割というアイデアから行った (JSEC2013 佳作受賞)。つまり、重心分割から次々と得られる点をファレイ点とした。しかし、この定義からは最も重要な任意の既約点 (a,b) がファレイ点であることを証明することができなかった。今年度は、インターネットで見つけた S.Kim と S.Ostlund の論文[3]を読んでいく中で、ファレイの既約分数理論がフィボナッチ数列の並列化であるのではないかというアイデアを得て、この新しい観点から、これまでの研究を完全にリセットし、全く新しいファレイ空間の構造研究をスタートさせた。その結果、2 次元ファレイ空間においては、 $(0,1)$ から**全てのファレイ点を生み出す行列を発見することに成功した**。そしてそれは、より一般的な n 次元ファレイ点においても、有限個のファレイ点からすべてのファレイ点を生み出す行列理論への拡張に繋がった。

この発見の後、私達が行ったファレイ空間の構造研究における主たる研究結果は、2 次元では 3 つの点 $(0,1), (1,0), (1,1)$ から構成される**基本ファレイ原子**の存在の発見である。そしてその相似な原子で 2 次

元ファレイ空間は埋め尽くされていたのである。3次元では7つの点から構成される基本ファレイ原子が存在し、そしてその相似な原子で3次元ファレイ空間は埋め尽くされていた。私達にはそれがまるで結晶のように見えたため、それを研究タイトルとした。以下、これらの発見を中心にファレイ空間の結晶構造について詳しく論じていく。

2. n 次元ファレイ点の定義とこれまでの研究との比較

まず、私達が研究対象とする n 次元ファレイ点と、 n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ を定義する。

定義 1. 点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が n 次元ファレイ点とは、次の2つの条件を満たすものをいう。

① $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ ② $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_r) = 1$ (ただし、 $r \leq n$ で、 $a_j = 0$ であるものは含まない.)

定義 2. n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ とは、 n 次元ファレイ点全体のことをいう。

インターネットで論文を検索した結果、私達と同じように高次元ファレイ点を研究している論文が2つ見つかった。1つは、S. Kim と S. Ostlund の論文[3]で、もう一つは A. Nogueira と B. Sevenec 論文[2]である。[3]では、私達とは異なる変換行列を使って高次元ファレイ空間の構造の研究が行われていた。そして、彼らの定義した超黄金比により、ファレイ点列の収束が研究された。しかし、各次元での超黄金比の定義の複雑さと幾何学条件の制約などにより、5次元までの議論で終わっていた。[2]は特殊線形群 $SL(n, \mathbf{Z}_+)$ の立場から高次元ファレイ数列を論じたものであるが、こちらも詳細は3次元までの一部の議論で終わっているように見えた。以下で詳しく論じることになるが、私達は n 次元ファレイ空間を、フィボナッチ数列や、その類似な数列の並列空間と見て、その構造を研究することに取り組み、高次元への拡張にある意味で成功したのである。

3. 2次元ファレイ点の生成行列とフィボナッチ数列

2次元ファレイ点について論じる。以下ファレイ点を縦ベクトルで表記する。通常ファレイ数列を観察すると $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$ という系列が見つかる。これはフィボナッチ数列であ

る。一方、フィボナッチ数列は行列 $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いることで、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

というようにすべてのフィボナッチ数が生み出されることが知られている。この行列 G をうまく利用すれば、全ての2次元ファレイ点を生み出す理論が得られるかもしれないと考えた。

定義 3. 変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値 $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、次の2つの操作のどちらかを行う。

$$\textcircled{1} \quad f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto G \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} \quad f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto G \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'_n| \\ |b'_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

(注意) $F^{-1}: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ は, 次の操作 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto G^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a_1| \\ |b_1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ を意味する.

私達の研究の立場は, “2次元ファレイ空間はフィボナッチ数列の並列化である” というものである. 以下にそのことを説明する.

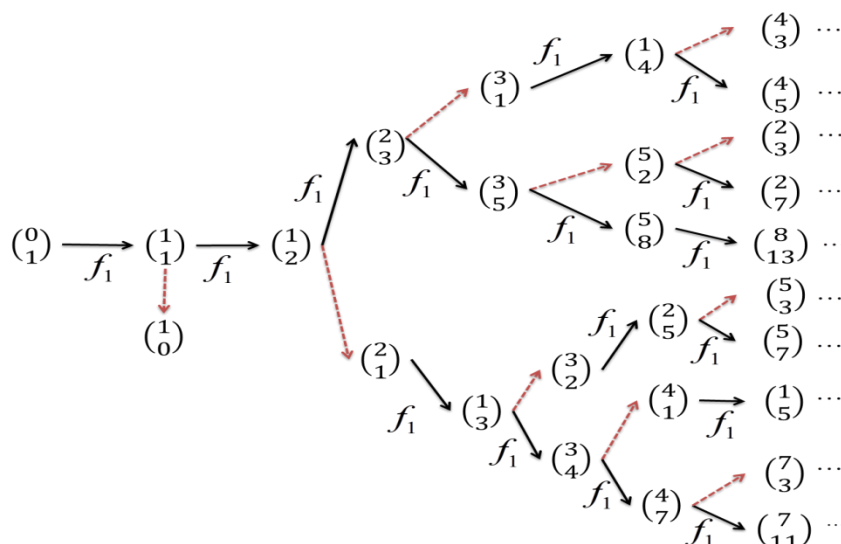


図1 (変換 F から生み出される 2次元ファレイ空間)

図1の f_1 の矢印を追っていくと, ファレイ点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の数 a, b はどちらも次第に大きくなっているように見える. しかし, G がフィボナッチ数列を生み出す行列であることから, f_1 から得られる系列のファレイ数列 $\frac{a_n}{b_n}$ は黄金比に収束しているはずである. まず, G の固有多項式を求めると, $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ である. そして, 固有値は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である. $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とおき, これを**黄金比**と呼ぶ. そして, 以下が成り立つ.

命題1. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をファレイ点とし, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = G^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \varphi$ となる.

(証明) $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ をフィボナッチ数列とすると, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{F_n a + F_{n-1} b}{F_{n-1} a + F_{n-2} b} = \frac{(F_n / F_{n-1}) a + b}{a + (F_{n-2} / F_{n-1}) b}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$ であることから示される. (証明終)

G の最大固有値がファレイ点の比の収束値に関係するという上の命題1は, 3次元以上を研究するうえで大きな手がかりになった.

4. 変換 F から生み出されるファレイ空間

私達は、図 1 から、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からすべての 2 次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した。

主結果 1. 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ の任意のファレイ点は、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生み出される。逆にいえば、任意のファレイ点は有限回の操作 F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される。

(証明) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換されることを示す。①ある k が存在し $a < b < ka$ とすると

$$F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}, F^{-1}\begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-2a \\ b-a \end{pmatrix}, F^{-1}\begin{pmatrix} b-2a \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-2a \end{pmatrix},$$

$$F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-3a \\ a \end{pmatrix}, \dots, F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b-(k-2)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-(k-1)a \\ a \end{pmatrix}.$$

$a' = b - (k-1)a$, $b' = a$ とおくと $a > a'$, $b > b'$ かつ $b' > a'$ が成り立つ。これは F^{-1} を繰り返すことで $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換されることを示す。② $b \leq a$ を仮定すると、 $F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}$ で $b-a < a$ であるので①に帰着する。既約性に関しては初等的な整数論を使えば証明できる。(証明終)

5. 2 次元のファレイ原子と結晶構造について

主結果 1 の変換の様子を詳細に研究した結果、ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は、操作 F によって右の図のような三角形に分割された構造を持つことがわかった。

右図における棒矢印は f_1 、点線矢印は f_2 を表す。

これに関して私達は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

というように 3 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が連結ループ構造をもつ

ことを発見した。この 3 点連結ループ構造を**ファレイ原子**と呼ぶ。そして、すべてのファレイ点においてファレイ原子が構成されていた。これが主結果 2 である。主結果 2 を定式化すると以下ようになる。

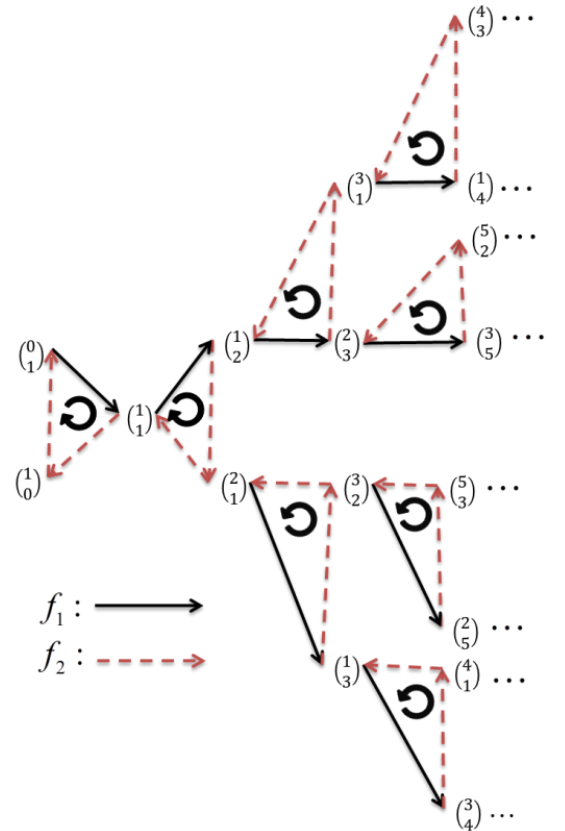


図 2 (2 次元ファレイ原子と結晶構造)

主結果 2. (ファレイ結晶構造定理)

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を任意のファレイ数とすると,

$$(f_2 \circ f_2 \circ f_1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \left(\text{ただし} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

すなわち, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ が連結なループ構造を作る.

(注意) 特に, ファレイ原子 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を **基本ファレイ原子** と呼ぶ. 実は基本ファレイ原子だけは F^{-1}

でループする. つまり, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっている.

6. ファレイ原子のインデックス

主結果 2 より, 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は, 3 点からなるファレイ原子が繰り返しパターンで配置されていることがわかる. そしてファレイ原子である 3 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ により, ファレイ原子を特徴づける以下の主結果 3 を発見した.

主結果 3. ファレイ原子を構成する 3 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ をベクトルとして足すと,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = 2(a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

定義 4. ファレイ原子 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$ に対して $a+b$ をファレイ原子の **インデックス** という.

(図 3 参照)

私達は, 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ のファレイ原子配置をインデックスだけに着目し, インデックス構造を研究した. 下の図 5 がインデックス構造であり, これを **インデックストツリー** と名付けた.

主結果 4. インデックストツリーはファレイツリーと類似の構造をもつ. (図 4, 5 参照)

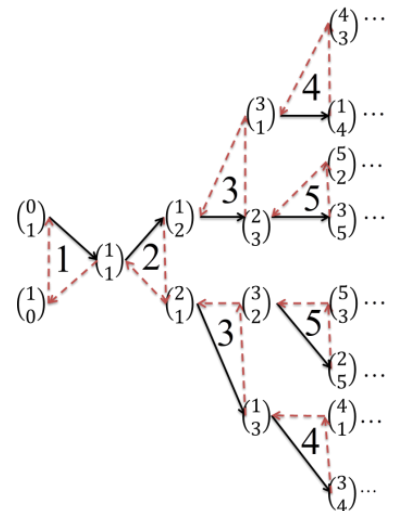


図 3 (ファレイ原子のインデックス)

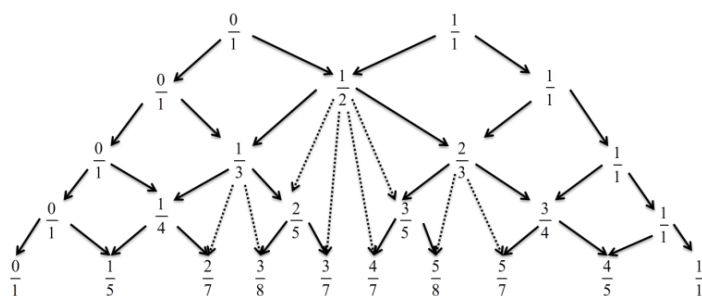


図 4 (ファレイツリー)

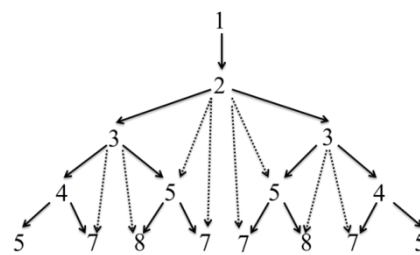


図 5 (インデックストリー)

主結果 4 が主張していることは、例えば、インデックストリーの 4 段目の 5 は 3 段目の 3 と 2 段目の 2 の和として得られる．例えば 5 段目の数 8 は 3 段目の 3 と 4 段目の 5 から得られるといった仕組みである．さらに、インデックストリーの 2 段目以下から 3 点和をとり、それを **2nd-インデックス**と呼んで構造を調べた．それが以下の図 6 である．

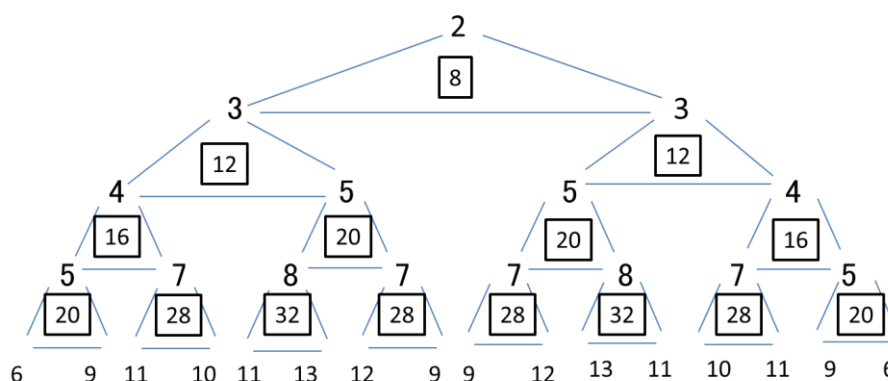


図 6 (2nd-インデックストリー)

2nd-インデックストリーもまたファレイツリーと類似の構造をもつ．同様の操作を繰り返すと、 r th-インデックストリーが構成される． r th-インデックストリーが常に同じ構造をもつことを主張するために、私達は次の主結果 5 を発見し証明した．

主結果 5. p を奇素数とする．このとき r th-インデックストリーを $\text{mod } p$ で構成すると r は $\frac{p-1}{2}$ で周期する．

(証明) フェルマーの小定理を使う．(証明終)

主結果 5 は、具体的に $p=5$ の場合では以下の図 7 のようになる．

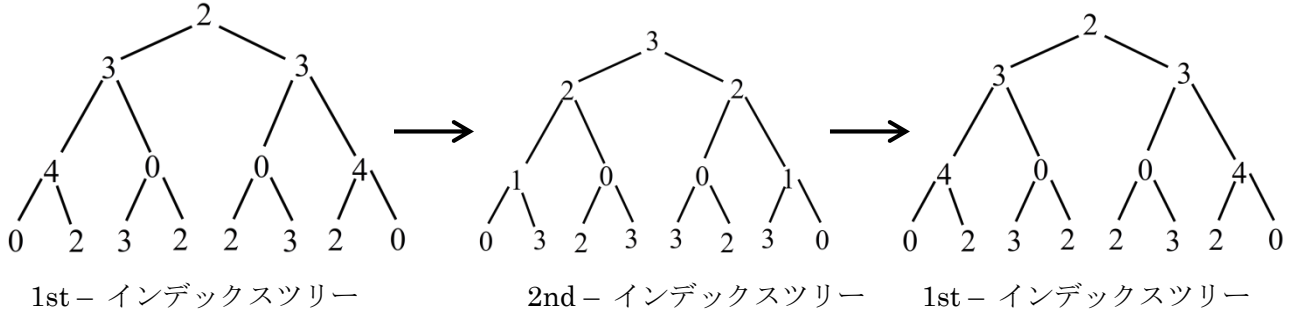


図 7 (mod 5 の場合の周期の状況)

(注意) 主結果 5 は最低周期を与えるものではない. 例えば, $p=17$ のときは周期が 4 であるが, 周期公式からは周期 8 となる.

7. 3 次元ファレイ空間の結晶構造について

3 次元においては, ファレイ点の生成行列を $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, 以下の変換 F を定義する.

定義 5. 変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値: $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は, 次の 4 つの操作のいずれかを行う.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \textcircled{2} \quad f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \textcircled{3} \quad f_3: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} a_n \\ -b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \textcircled{4} \quad f_4: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &\mapsto G \begin{pmatrix} -a_n \\ -b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は, 生成行列 G によりフィボナッチ数列の並列化としてとらえられた. そして, 3 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_3$ も G により, ある数列の並列化になっていることを問題とし, 2 次元と同様な考察を行った. まず, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めると, $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ である. そして,

これは 3 つの異なる実数の固有値を持つが, 1 以上固有値は 1 つしかないため, これを φ_3 とおいて, 3 次黄金比と名付けた. これにより, 私達は命題 1 と類似の結果を得た.

命題 2. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ をファレイ点とし $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = G^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \varphi_3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \varphi_3 - 1$ となる.

(証明) $a_n = c_{n-1}$, $b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$, $c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$ より, $c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2} - c_{n-3}$ が得られることから示される. (証明終)

私達は, 2次元のときと同様に, 操作 F を繰り返すことで, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からすべての 3次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した. そして, 次の主結果を得た.

主結果 6. 3次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_3$ の任意のファレイ点は, 操作 F を繰り返すことで, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生み出される. 逆にいえば, 任意のファレイ点は有限回の操作 F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される.

(証明) 主結果 1 と同様の議論で示される. (証明終)

さて, 3次元においてもファレイ原子は存在するのだろうか. これが私達の次なるテーマとなった. コンピュータで調べた結果, すぐに

わかったことは 7 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が F^{-1} で連結さ

れ, ループ構造を形成していたことである. そして, 私達は 2次元における主結果 2 と同様なファレイ結晶構造があることを期待した. 実際コンピュータでの計算結果はいつも肯定的であった. そして次の主結果 7 を証明した. 主結果 7 より上の 7 点の連結ループ構造は, 基本的であるため, これを基本ファレイ原子と呼ぶことにした. (イ原子)

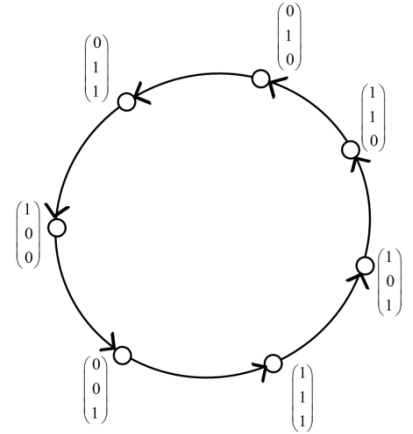


図 8 (7 点の基本ファレイ原子)

主結果 7. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を任意の 3次元ファレイ点とすると, それを含む連結なループ構造が存在し, それは最低 7 点で構成される.

(証明) $F: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ とすると, a', b', c' はどれも a と b と c の和か差で得られることから偶奇性だけ

は保存される. よって,

$$\begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \\ \text{偶} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{偶} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{奇} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{偶} \\ \text{奇} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{奇} \\ \text{奇} \\ \text{偶} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \\ \text{偶} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \text{偶} \\ \text{奇} \\ \text{奇} \end{pmatrix}$$

となり, 最低 7 回の変換 F をほどこさないとループにはなり得ないことがわかる. 存在性については, 以下のループがある.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} c \\ b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3} \begin{pmatrix} a+b+c \\ a \\ a+c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} a+c \\ 2a+c \\ a-b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} a-b \\ a+b+c \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4} \begin{pmatrix} b \\ a+c \\ b-c \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4} \begin{pmatrix} b-c \\ a-b \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

これにより主結果 7 は証明された. (証明終)

しかし, 3 次元ファレイ空間の構造は, 図 9 のように, 非常に複雑であった. そこで, 以下を定義した.

定義 6. ループとなる 7 点 $\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$ ($1 \leq j \leq 7$) に対して, $\sum_{j=1}^7 \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = 4e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる自然数 e が存在したとき, そのループを**ファレイ原子**と呼び, e をファレイ原子の**インデックス**という.



図 9 (ループ構造)

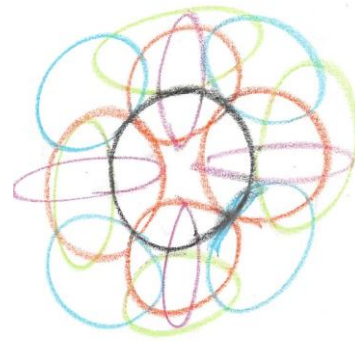


図 10 (ファレイ原子のループ構造)

定義 6 によって, ファレイ原子のループ構造は, 少し複雑さが減少した感があったが, インデックス構造が明確になるようには思えなかった. この問題を解決するために, 以下の AK 条件を考えた.

AK条件：インデックス e をもつファレイ原子の全てのファレイ点についてその成分の値は e 以下である。

定義 7. ルAK条件を満たすファレイ原子を **very good なファレイ原子**（またはAK-ファレイ原子）と呼ぶ。

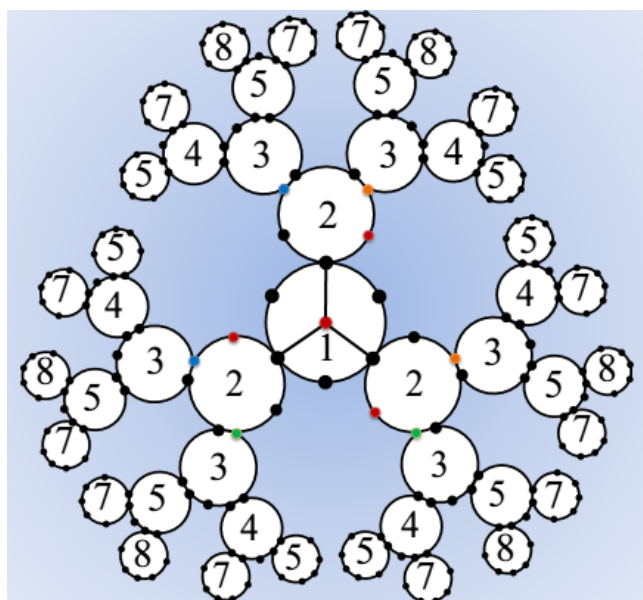


図 11 (very good なファレイ原子のインデックス構造)

コンピュータによる計算結果ではあるが、私達は次の予想を得ている。

主結果 8 (予想) .

- (1) 2つの very good なファレイ原子が交わるなら、それは2点である。
- (2) very good なファレイ原子全体から得られるインデックス構造は、ファレイツリーと同じ構造をもつ。
- (3) very good なファレイ原子全体は、3次元ファレイ空間である。

8. n 次元ファレイ空間の結晶構造

2次元と3次元の研究から、 n 次元ファレイ点の生成行列を以下の右下三角行列とする。

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

G_n の固有多項式は, $\sum_{\alpha=0}^n a_{\alpha} x^{\alpha} = 0$ である. ここで, $\alpha = 2k$ のときは $a_{\alpha} = \delta \cdot {}_{n-k}C_k$, $\alpha = 2k+1$ のときは $a_{\alpha} = \delta \cdot {}_{n-1-k}C_k$ である. δ は $n-k \equiv 1, 2 \pmod{4}$ のとき -1 , $n-k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ のとき $+1$ である. たとえば, $n=4$ のときは $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $n=5$ のときは $\lambda^5 - 3\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, $n=6$ のときは $\lambda^6 - 3\lambda^5 - 6\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ となる.

さて, G_n の固有多項式から得られる固有値はすべて実数であり, かつ 1 以上の固有値は 1 つだけしかない. それを φ_n とおき, n 次黄金比と呼ぶ. 以下の命題 3 は命題 1 や命題 2 と同様な方法で証明することができた.

命題 3. $\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ を任意の n 次ファレイ数とし, $\begin{pmatrix} a_m^1 \\ \vdots \\ a_m^n \end{pmatrix} = G^m \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ とすると, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m^n}{a_m^1} = \varphi_n$ となる.
--

4 次元以上のファレイ空間を研究すると, 3 次元以下とは異なる状況が起こっていた. 9 次元まで調査した結果, 基本ファレイ原子は必ず 1 つではなかった. そして, 各基本ファレイ原子によって, ファレイ空間はクラスに分割される場合があるように見えた. このことを, もう少し詳しく述べよう. n 次元

ファレイ空間においても変換 F は, $\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ の a^j の係数を $+1$ か -1 に置き換えて, G を作用させ, 得られ

たものの絶対値をとるものとする. このとき, 主結果 1 や主結果 6 と同様に, ある k が存在し,

$$(F^{-1})^k \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \text{ とすると, } a^1 > b^1, \dots, a^n > b^n \text{ となり, 最終的に } a^j = 0, 1 \text{ となる. このような } 0 \text{ と } 1 \text{ から}$$

なる n 次元ファレイ数は基本的なものと言える. そして, その中から基本ファレイ原子の構造が決ま

る. このことから 4 次元ファレイ空間を調査すると, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という 2 つの 7 点からなる基本ファレイ原子と, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 点からなる基

本ファレイ原子が存在した. これは 4 次元ファレイ空間が 3 つのクラスに分割されることを意味した. 以下が 9 次元までのファレイ空間の構造である.

表 1 (n 次元ファレイ空間のクラスと基本ファレイ原子)

次元	基本ファレイ原子の構成点の数	クラスの数
2	3	1
3	7	1
4	7	2
	1	1
5	31	1
6	63	1
7	15	8
	3	2
	1	1
8	15	16
	5	3
9	511	1

n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ の結晶構造の今後の研究課題

- ① クラス数が 2 以上になる空間は何次元か.
- ② 各クラスの基本ファレイ原子は結晶構造にどのように影響しているか.
- ③ 2 次元のインデックスツリーのような構造が高次元でも存在するか.

参考文献

- [1] 畑正義, 神経回路モデルのカオス, 朝倉書店,(1998)
- [2] Arnaldo Nogueira , Bruno Sevennec, Multidimensional Farey partitions, Indagationes Mathematicae Volume17, 2006
- [3] Seung-hwan Kim, Stellan Ostlund, Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems, Physical Review A Volume 34, Number 4, 1986