

研究内容

ファレイ数列の高次元化の研究

津山工業高等専門学校

チーム名：津山高専Bチーム

代表者名：小林祐志

赤松昌俊(情報工学科 2 年)

小林祐志(電気電子工学科 2 年)

1. 目的と概要

「**ファレイ数列を高次元化する**」これが私達の研究の目的である。ファレイ数列とは0と1の間のすべての既約な分数のことである。しかし、私達が興味を持ったことは、それらの分数の生成過程において、2つの分数の分母同士、分子同士を足すという簡単な計算で、既約分数が次々と得られていくことである([4]参照)。また、ファレイ数列は、どんどん小さくなりながらも隣接していくフォード円と関係があることも興味深く([3]参照)、さらに、現代の数学や物理における非線形現象の解明のための研究にも使われているということを知り驚いた([1]参照)。

ファレイ数列を高次元化しようと考えたきっかけは、数学クラブでの議論の中で通常の平行線が必ず無限遠点で交わってしまうという射影平面を学んだことにある。この立場で考えると分数は比と考えればよく、そしてファレイ数列は1次元射影空間(射影直線)における既約な比の列といえる。したがって、2次元射影空間(射影平面)の整数点($a:b:c$)で3つの数の最大公約数が1であるものを2次元ファレイ連比として考え

れば、より高い次元のファレイ連比も定義でき、研究することが可能となるのではないかと考えた。

この論文では、特に2次元ファレイ連比に関する研究について論じる。そのために2次元ファレイ連比の構成法を帰納的に定義する。

私達が示す結果は大きくみて3つある。第1は、そのステップから生まれる正方行列の行列式の値が1となる点である。第2は、私達がフォードパイプと名付けたものの発見である。つまり、ファレイ連比と対応するフォード円の3次元拡張に成功した点である。第3は、離散力学系の2次元ファレイ連比を使ったモデル化である。

実はまだ明確な結論が得られていないが、私達が定義した2次元ファレイ連比は、2次元カントール集合であるシェルピンスキーのカーペットにも対応できるのではないかと確信している。

2. ファレイ数列と既知の結果

通常、ファレイ数列とは2つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし、それらの分子同士、分母同士のそれぞれの足し算で次の分数をつくり、この操作をくり返して得られていく分数列のことである。より具体的には、ステップ0のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ とする。このとき注意すべきことは2つの分数から得られる行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値は1となることである。ステップ1のファレイ数列は $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ を加えた $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ であり、このとき隣り合う2つの分数から得られる行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の絶対値は1となる。ステップ2以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ、隣り合った2つの分数から新しい分数を上演算で作っていく。したがって、ステップ2のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ で、これについても隣り合う2つの分数から得られる行列の行列式の絶対値はすべて1となり、ステップ3のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$ というようになり、行列式についても同様にすべて1となる。このようにして得られた分数を**ファレイ分数**と呼ぶ。一方、分子と分母の最大値が r となる正の分数を**次数 r の分数**と呼ぶ。私達が今回の研究の基礎として着目した既知の結果は以下のものである。

定理 1 任意のファレイ分数は既約であり、任意の次数 r の既約分数はファレイ分数である。

定理 2 ステップ n のファレイ数列において、数直線上の隣り合う 2 つの分数を取り出し、それを 2 次正方行列とみると、その行列式の値の絶対値は 1 である。

定理 3 xy 平面上の区間 $0 \leq x \leq 1$ で互いに接するフォード円と呼ばれる円群の中心の x 座標はファレイ分数である。(図 1)

定理 4 ファレイ数列に対応する 0 と 1 を使った符号が存在する。
(これは離散力学系に関する結果である。)

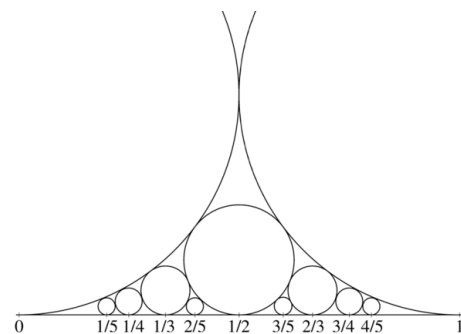


図 1(フォード円とファレイ分数)

私達の研究対象は n 次元射影空間の非負の整数点 $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ である。以下、これを単に n 次元連比と呼ぶ。

(例 1) 1 次元連比 $(a_0 : a_1)$ について $a_1 \neq 0$ のとき、 $(a_0 : a_1)$ は $\frac{a_0}{a_1}$ に対応する。そして $(1 : 0)$ は射影直線上の無限遠点 ∞ に対応する。

(例 2) 2 次元連比 $(a_0 : a_1 : a_2)$ について $a_2 \neq 0$ のとき、 $(a_0 : a_1 : a_2)$ は通常の xy 平面上の有理点 $P\left(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}\right)$

に対応する。そして、 $(0 : 1 : 0)$ と $(1 : 0 : 0)$ は射影平面の無限遠の 2 つの原点 Q_∞ と R_∞ に対応する。

私達は n 次元連比の中から、 n 次元ファレイ連比になるものをうまく定義し、上に述べたファレイ数列に関する既知の結果(定理 1 から定理 4)が、私達が考えたファレイ連比において、どのように拡張されるのかを研究した。

3. 2 次元ファレイ連比について

ファレイ数列における 2 つの分数の演算は分子同士、分母同士の足し算を行うことである。これを私達の立場である比(1 次元ファレイ連比)で考えると、 $(a_0 : a_1) + (b_0 : b_1) = (a_0 + b_0 : a_1 + b_1)$ ということになる。この演算は 2 つのベクトルの足し算とみることでもある。

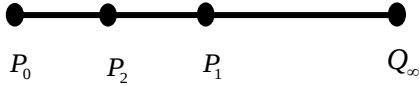
定義 1 2 つの n 次元連比 $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, $(b_0 : b_1 : \dots : b_n)$ に対して、

$(a_0 : a_1 : \dots : a_n) + (b_0 : b_1 : \dots : b_n) = (a_0 + b_0 : a_1 + b_1 : \dots : a_n + b_n)$ と定義する。

この演算を **ファレイ和** と呼ぶ。さらに、2 つのファレイ和から得られた連比を **中間比** と呼ぶ。

射影空間上のファレイ和から得られる中間比は、通常の射影平面で考えると、2 つの点を直線で結んだときの間の点となる。例えば、2 次元連比で $P_0(0 : 0 : 1)$ と $Q_\infty(1 : 0 : 0)$ の中間比は $P_1(1 : 0 : 1)$ であるが、これ

は xy 平面上の $\left(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}\right)$ に対応する. さらに, P_0 と P_1 の中間比は $P_2(1:0:2)$ であり, これは $\left(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}\right)$ に対応する.



定義 2 n 次元連比 $(a_0:a_1:\cdots:a_n)$ において, $a_0:a_1:\cdots:a_n$ の最大値が r となる連比を **次数 r の n 次元連比** と呼ぶ. また $a_0, a_1, \dots, a_n$ の最大公約数が 1 である連比を **既約連比** と呼ぶ. ただし, $a_k=0$ であるものは最大公約数の計算には含めない. また $a_0, a_1, \dots, a_n$ の中の 1 つの数 a_j だけがゼロでなく残りはすべてゼロである場合は $a_j=1$ であるものに限り既約とする.

以上の 2 つの定義を用い, 以下に 2 次元ファレイ連比を既約的に構成していく. (実はこの構成法は定理 2 の拡張を意識したものである.)

(ステップ 0) 2 次元射影空間内において, 3 個の次数 1 の 2 次元ファレイ連比 $P_0(0:0:1)$, $Q_\infty(0:1:0)$, $R_\infty(1:0:0)$ を初期値とし, それらを頂点とする **無限大三角形 T** を考える. (これは射影平面の 3 つの射影平面の原点を結んでできたものである).

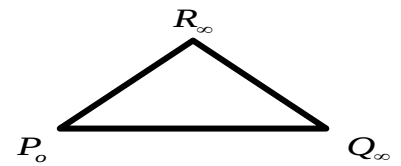


図 2 (無限大三角形 T)

(ステップ 1) 3 個のファレイ和 $P_1 = P_0 + Q_\infty = (0:1:1)$,

$Q_1 = Q_\infty + R_\infty = (1:1:0)$, $R_1 = R_\infty + P_0 = (1:0:1)$ と, さらに

$C = (1:1:1) = P_0 + Q_\infty + R_\infty$ の点を取る. そして, 各点 $P_0, Q_\infty, R_\infty, P_1, Q_1, R_1$

から C まで直線で結び, T を 6 個の三角形で分割する. それらを

$T_1(k) (1 \leq k \leq 6)$ と名付ける. 得られた $T_1(k)$ の頂点を **次数 1 のファレイ点** (ま

たは連比) と呼び, さらに $\{T_1(k)\}$ を **次数 1 のファレイ点による T の分割** と呼ぶ.

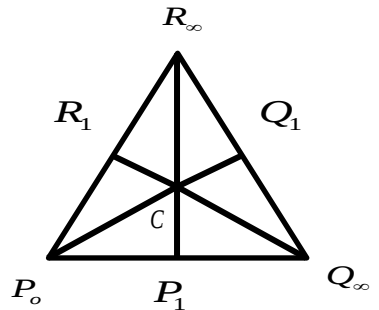


図 3

(次数 1 のファレイ点による T の分割)

(ステップ 2) 上で得られた各三角形 $T_1(k)$ 上において, 2 点のファレイ和をそれぞれ求めると, これらはすべて次数 2 の連比である. これらの点を, **次数 2 のファレイ点** (または連比) と呼ぶ. さらに各三角形 $T_1(k)$ 内において, 今求めた 次数 2 のファレイ点 2 個と次数 1 のファレイ点 1 個 を使って三角形 $T_2(j)$ を作り, 全ての $T_1(k)$ を分割していく. この分割を **次数 2 のファレイ点による T の分割** と呼ぶ.

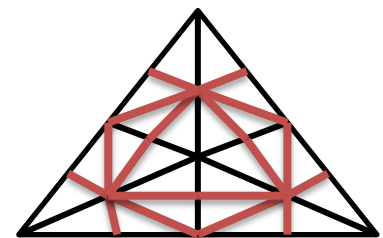


図 4

(次数 2 のファレイ点による T の分割)

(ステップ 3) 次数 2 のファレイ連比による T の分割で得られたそれぞれの三角形 $T_2(j)$ においてステップ 2

の時と同様に、2 点のファレイ和で次数 3 となるものだけを求め、それらを次数 3 のファレイ点(または連比)と呼ぶ。そして、各 $T_2(j)$ を次数 3 のファレイ点 2 個と次数 2 以下のファレイ点 1 個を使って、三角形 $T_3(i)$ をつくり、全ての $T_2(j)$ を分割する。この分割を次数 3 のファレイ点による T の分割と呼ぶ。

以後ステップ 3 と同様な操作を繰り返し次数 $m (m \geq 4)$ のステップのファレイ点をつくり、さらに、次が私達の考えた重要な点であるが、直前のステップで得られた三角形 $T_{m-1}(k)$ を次数 m のファレイ点を少なくとも 1 個もつ三角形 $T_m(j)$ をつくり $T_{m-1}(k)$ を分割する。このようにして帰納的に次数 m のファレイ点による T の分割を構成していく。

私達の 2 次元ファレイ連比の構成法は上のように再帰的であるため、 T の分割を数値だけで取り扱うことも可能である。以下がその一部である。

$$T \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) 次数 1 のファレイ連比による T の分割

$$\begin{aligned} T_1(1) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, & T_1(2) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_1(3) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ T_1(4) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_1(5) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_1(6) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(2) 次数 2 のファレイ連比による T の分割

$$\begin{aligned} T_2(1) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(2) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(3) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(4) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ T_2(5) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(6) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(7) & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(8) & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \dots\dots\dots & & & & & & \\ T_2(21) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(22) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(23) & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, & T_2(24) & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

さて、以上のように得られた次数 m までのファレイ連比全体をランク m の 2 次元ファレイ連比、または単に2 次元ファレイ連比と呼ぶ。

主結果 (1) 2 次元ファレイ連比は既約連比である。

(証明) ファレイ数列(1 次元)の既約性を用いることで示される(証明終)。

残念であるが、今回私達の研究においては、2 次元既約連比が 2 次元ファレイ連比であることを示すことはできなかった。しかし、コンピュータによる計算結果からは、すべての値がファレイ連比となっていた。

予想 (1) 任意の 2 次元既約連比は 2 次元ファレイ連比である。

以上がファレイ数列における既知結果（定理 1）を拡張した研究である．次に，ファレイ数列における定理 2 を拡張する研究について述べる．これについては，上で示した T の分割で説明しよう． T の分割で得られた小三角形 $T_j(k)$ の 3 個の頂点のデータを行列とみて，行列式を計算する．するとどれもその絶対値は 1

となっていることが分かる．例えば， $T_2(8) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ と考え，その行列式の絶対値を計算す

ると 1 である．このことは，どんなステップのどんな小三角形から得られる行列でもいえる．実は，この結果を言うために，多くの試行錯誤を繰り返し，2 次元ファレイ数列を構成したのである．

主結果 (2) 2 次元ファレイ連比の構成過程で順次得られる三角形の頂点からつくられる行列の行列式の値の絶対値は 1 である

(証明) 初期点の 3 点は $P_o(0:0:1), Q_o(0:1:0), R_o(1:0:0)$ であるので， $|\det(P_o, Q_o, R_o)| = 1$ であることに注意する．その後は，ファレイ分割の定義から得られるファレイ和と行列式と基本性質から主結果 (2) は得られる（証明終）．

ところで，Nogueira と Sevennec の論文” Multidimensional Farey partitions” [2] では，私達の研究と同じ 2 次元ファレイ分割を扱っている．しかし，この論文では，2 次元ファレイ分割を非負整数の 3 次元特殊線形群 $SL(3, \mathbb{Z})$ だけに着手して研究されたもので，幾何学的考察がない．そのため，ファレイ数列の 2 次元化は完了していない．この点からみても，私達の射影平面を三角形分割するという手法による 2 次元化の研究は大きな成果であると主張したい

4. 2 次元ファレイ連比に関するフォード円の拡張について

フォード円とはファレイ数列の分数 $\frac{b}{a}$ から中心 $(\frac{b}{a}, \frac{1}{2a^2})$ ，半径 $\frac{1}{2a^2}$ で作られる円のことである (図 1 参照)．これらのフォード円はファレイ数列の生成過程に応じて，小さくなりながらも隣り合うフォード円に必ず接するという性質をもつことが特徴である．

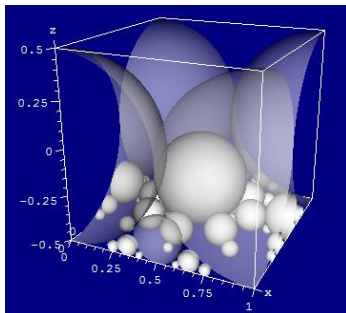


図 5 フォード球

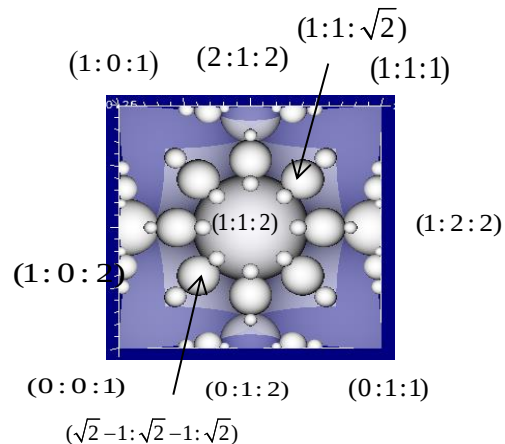


図 6 フォード球の xy 平面の投影図

この節での私達の目的は、ファレイ数列に関する既知の結果(定理 3)の拡張にある．すなわち 2 次元ファレイ連比に対応するようなフォード円のような幾何学的対象が存在するのかを問題とした．まず、安易にフォード円をフォード球として構成できると考えて、コンピュータでシミュレーションしてみたが、それは間違いであった．図 6 は、この方法による xy 平面への投影であるが、特に直線 $y = x$ 上の中心座標に対する連比で平方根が現れてしまう．

私達の研究成果は**フォードパイプ**と名付けたものの発見である．それは、まず xyz 座標系における xz 平面 ($0 \leq x \leq 1$) にフォード円を用意し、それらの円を y 方向へ 1 だけ引き延ばし、パイプ状にする．これをフォードパイプと呼ぶ．同様に yz 平面 ($0 \leq y \leq 1$) のフォード円も x 方向へ 1 だけ引き延ばして、フォードパイプを作る．そして、それらのフォードパイプの交わった部分の中心座標における (x, y) の値が 2 次元ファレイ連比に対応するのではないかと考えたのである．図 8 は平面 $y = x$ の断面図であるが、フォードパイプの交わりは楕円となっているが、隣り合う楕円は互いに接している．

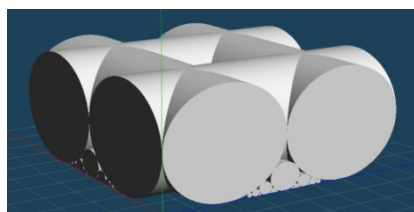


図 7 フォードパイプの様子

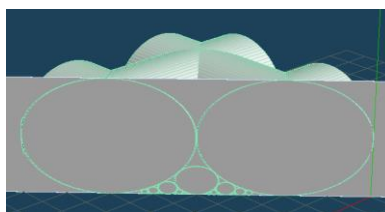


図 8 平面 $y = x$ での断面図

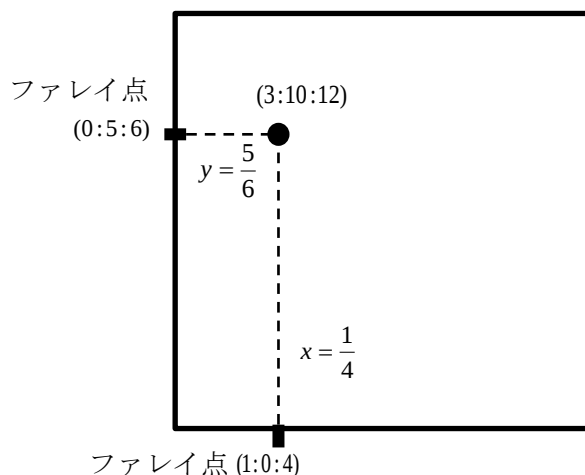
次の命題の発見は、2 次元ファレイ連比とフォードパイプの関係を証明することに大きな役割を果たすものとなった．しかし、特に直線 $x = \frac{s}{t}$ と直線 $y = \frac{v}{w}$ の交点がファレイ点であることを示すことが難しい．現在は証明に自信がないが、最終選考会までには完全にする予定である．

命題 1 次数 r のファレイ点 $(s:0:t)$ に対する直線

$x = \frac{s}{t}$ と、次数 q のファレイ点 $(0:v:w)$ に対する直線

$y = \frac{v}{w}$ の交点はファレイ点であり、それは t と w の最

大公約数を d とすれば $\left(\frac{sw}{d} : \frac{vt}{d} : \frac{tw}{d}\right)$ である．



命題 1 を用いることで、私たちは次の主結果を得た．

主結果 (3) : xyz 座標系において、 x 軸に平行なフォードパイプと y 軸に平行なフォードパイプの交差する部分の中心座標の (x, y) の値は 2 次元ファレイ点に対応する．また、フォードパイプの交わった部分の隣り合うもの同士は必ず接する．

5. 力学系への応用

「神経回路のカオス」(畑政義著、朝倉書店) [1]の中にある離散力学系の周期アトラクタとして、ファレ

イ数列が取り上げられた．それは $0 < c < 1$ である定数 c に対し関数

$$f_c(x) = \begin{cases} x - c + 1 & (x < c) \\ x - c & (x \geq c) \end{cases} \quad (5.1)$$

から得れる．以下に上の関数 $f_c(x)$ からどのようにしてファレイ数列的な周期性が得られるかを説明する．

(5-1) ファレイ分数の符号化

まず， $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ をそれぞれ符号 $\{0, 1\}$ と対応させる． $0, 1$ を $F(2)$ ビット値と呼ぶ．そして， $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ は符号 $\{0, 01, 1\}$ ， $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ は符号 $\{0, 001, 01, 011, 1\}$ というように，符号のほうも帰納的に定義していく．

ファレイ分数 $\frac{b}{a}$ に対し，上で定義した符号を $\frac{b}{a}$ の $F(2)$ 符号と呼ぶ．実はこの符号化は置換を用いて表すこ

とも知られている．すなわち $\frac{q}{p}$ の符号は，置換 $\sigma = \langle 1, 2, 3, \dots, p \rangle$ を考え， σ^q を計算し， $1, 2, \dots, p - q$ を 0 とし，それ以外を 1 とすることで得られる．

例えば，ファレイ分数 $\frac{3}{7}$ では，置換 $\sigma = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$ を考える．そして， σ^3 を計算すると

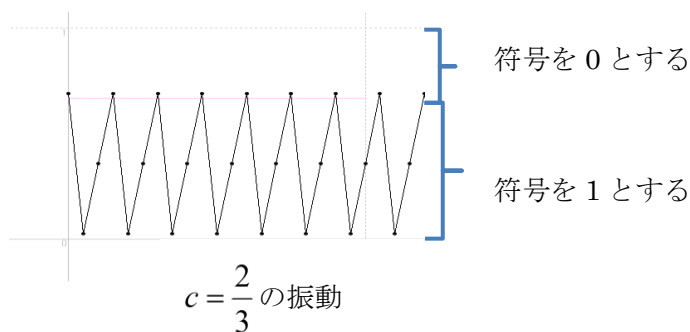
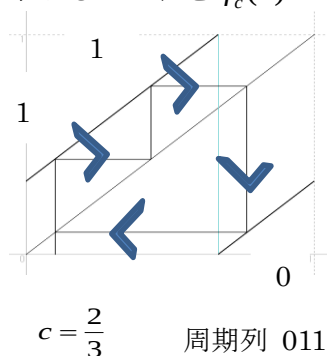
$\sigma^3 = \langle 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5 \rangle$ となる．1 から 4 を 0，5 から 7 を 1 で置き換えることで $\frac{3}{7}$ の $F(2)$ 符号は 0010101 であることがわかる．

(5-2) 離散力学系とファレイ符号

離散力学系(5.1)から 1 つの符号をつくる方法として以下が知られている．

- (1) c を固定する
- (2) 区間 $(0, c)$ の任意の点 x_0 をとり，符号を 1 とする．
- (3) 次に $f_c(x_0) < c$ であれば $f_c(x_0)$ の符号を 1， $f_c(x_0) \geq c$ であれば $f_c(x_0)$ の符号を 0 とする．

以後 $f_c^n(x_0)$ についても $f_c^n(x_0)$ の符号を同様に定める．これによって $[x_0, f_c(x_0), f_c^1(x_0), f_c^2(x_0), \dots]$ に対応する符号が求まる．これを $f_c(x)$ から定まる c の符号と呼ぶ．



次の定理が知られている。

定理 5. c をファレイ分数とする. このとき $f_c(x)$ から定まる c の符号は周期的であり, 周期する部分の符号は c の $F(2)$ 符号と一致する

(5-3) 2次元ファレイ連比と直積

私たちは 2 次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ の符号化の研究を行った. $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$ と仮定すると $(\alpha:\beta:\gamma)$ は

$(C_1, C_2) = \left(\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \left[\frac{\beta}{\gamma} \right] \right)$ と同一視できる. この時, 分数 $\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \left[\frac{\beta}{\gamma} \right]$ は $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$ の既約分数とする. そして, ファレイ分数 $\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]$ と $\left[\frac{\beta}{\gamma} \right]$ をそれぞれ符号化する. これを $F(2)$ 符号の直積と呼ぶ.

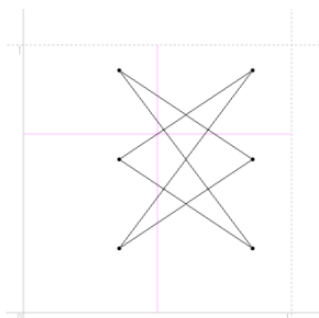
たとえば $(3:4:6)$ は $\left(\frac{3}{6}, \frac{4}{6} \right)$ であるが, それぞれ約分してファレイ分数 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$ を得る. $\frac{1}{2}$ の $F(2)$ 符号は 01, $\frac{2}{3}$ の $F(2)$ 符号は 011 であるので, $(3:4:6)$ の $F(2)$ の符号の直積は (01,011) となる.

(5-4) 離散力学系と 2 次元ファレイ連比の符号

関数 $x(t)$ と $y(t)$ が三角関数である場合, (x, y) の描く図形はリサージュ図形となる. 定理 5 より, 式(5,1) の $f_c(x)$ における定数 c をファレイ分数とすると, $f_c(x)$ は周期的である. したがって, $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$ である 2 次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ に対して, $(C_1, C_2) = \left(\left[\frac{\alpha}{\gamma} \right], \left[\frac{\beta}{\gamma} \right] \right)$ が決まり, 周期関数 $x = f_{c_1}(t)$, $y = f_{c_2}(t)$ により, リサージュ図形のような 2 次元的な周期グラフ が得られる. これを **2 次元ファレイ図形** と呼ぶ.

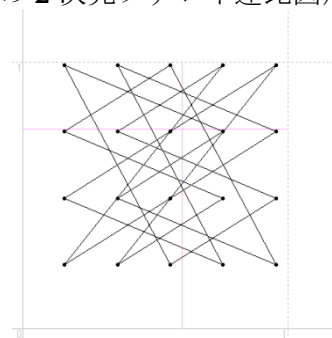
例えば, 2 次元ファレイ連比 $(3:4:6)$ でいえば周期関数 $x = f_{c_1}(t)$, $y = f_{c_2}(t)$ から 2 次元ファレイ図形

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ が得られる. 2 次元ファレイ連比 $(12:15:20)$ の 2 次元ファレイ連比図形は以下の $F\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$ である.



$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

(3:4:6) の 2 次元ファレイ図形



$$F\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$$

(12:15:20) の 2 次元ファレイ図形

私たちは、さらに直積を 1 次元的な符号に変え、2 次元ファレイ連比を 1 次元波形に変換する研究を行った。

定義 $F(2)$ ビット値の直積 $(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)$ をそれぞれ 0,1,2,3 としこれを $F(4)$ ビット値と呼ぶ。

先に示したように、例えば、ファレイ連比 $(3:4:6)$ では周期関数 $x = f_{c_1}(t)$, $y = f_{c_2}(t)$ から 2 次元ファレイ図形 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ が得られた。一方 $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{3}$ の $F(2)$ 符号はそれぞれ 01 と 011 である。そして図形 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ の折点の情報から、 $F(4)$ ビット値で順に並べると 031213 となる。より詳しく言えば、 $f_{1/2}(t)$ と $f_{2/3}(t)$ の $F(2)$ 符号はそれぞれ 0101010101 と 011011011011 であり、これより 6 個の $F(2)$ ビット値の直積 $(0,0)(1,1)(0,1)(1,0)(0,1)(1,1)$ を $F(4)$ ビット値に変換することで、巡回する部分が、031213 であるということである。

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \hline
 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \downarrow \text{直積化} \\
 \downarrow F(4)\text{ビット化}
 \end{array}$$

定義 2 次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ の 2 次元ファレイ図形 $F\left(\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right], \left[\frac{\beta}{\gamma}\right]\right)$ から得られる $F(4)$ ビット値の列を $(\alpha:\beta:\gamma)$ の $F(4)$ 符号と呼ぶ。

以上のことを用いて、私達は次の主結果を示すことができた。

主結果 (4) 2 次元ファレイ連比 $(\alpha:\beta:\gamma)$ の $F(4)$ 符号について、その周期は γ であり、 $F(4)$ 符号は $\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]$ と $\left[\frac{\beta}{\gamma}\right]$ の $F(2)$ ビット値の直積から $F(4)$ ビット値に変換して得られる。

以下の図は、具体的な 2 次元ファレイ連比の $F(4)$ 符号への変換過程を表す。他の符号もこのようにして

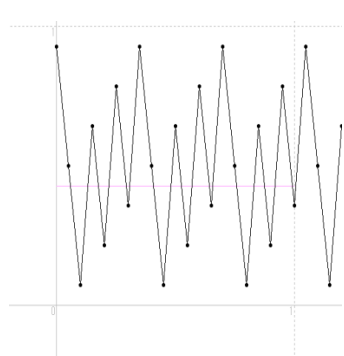
$F(4)$ 符号に変換され、そして 2 次元ファレイ連比の波形を得る。

2次元ファレイ連比

xy座標へ変換

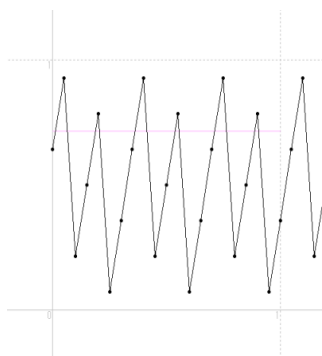
$$(3:5:7) \rightarrow \left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7} \right)$$

→



$$\frac{3}{7} \rightarrow 001010$$

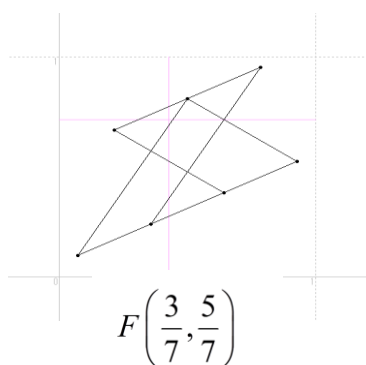
(F(2)符号)



$$\frac{5}{7} \rightarrow 0110111$$

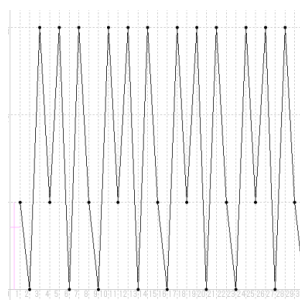
(F(2)符号)

→



$$F\left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

→



2次元ファレイ図形

F(2)符号の直積(001010,0110111)

(3:5:7)のF(4)符号 0310313 とその波形

今後の展望

「神経回路モデルのカオス」という本では、離散力学系をファレイ数列から得られた符号を使って多くのモデル化の研究がなされていた。このことから、私達が得た2次元ファレイ連比によるモデル化への道筋と高次元化の研究は、より深いものへと発展させることができると考えている。

6. 参考文献

[1]畑正義, 神経回路モデルのカオス, 朝倉書店,(1998)

[2]Arnaldo NOGUEIRA, Bruno SEVENNEC, Multidimensional Farey partitions, Indagationes Mathematicae Volume17, Issue3, 25 September 2006, Pages437-456

[3]Julane Amen, Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem, DigitalCommons@University of Nebraska – Lincoln

[4]「ファレイ数列 -wikipedia」

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%83%AC%E3%82%A4%E6%95%B0%E5%88%97>(2013/4/26)