三元整数環のピタゴラス数の分類

矢部　佳史（津山高専, 電子制御工学科４年）

1　はじめに

本研究の目的は，**三元整数環** M_3 のピタゴラス数の分類である．三元整数 M_3 とは，四元数 [Ho] に習って書くと，M_3 は集合 $\{xi+yj+kz \mid x,y,z\in\mathbb{Z}\}$ で $i^2=i,\ k^2=k,\ ij=jk=j,\ j^2=ji=ki=ik=kj=0$ をみたすものとすることができる．しかし，これは２次整数行列環の部分環とみることもでき，

$$M_3=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}\;\middle|\; x,y,z\in\mathbb{Z}\right\}$$

である．以下，本論文では三元整数環 M_3 を上の行列として扱い，M_3 の元を M_3 **数**と呼ぶ．また，M_3 数の中で行列式が ± 1 であるものは**単元**と呼ぶ．

さて，自然数のピタゴラス数 (a,b,c) は，$a^2+b^2=c^2$ をみたすもので，これは２つのパラメータ s と t $(s>t)$ を用いて

$$a=s^2-t^2,\quad b=2st,\quad c=s^2+t^2$$

と表わされることはよく知られている．特に a,b,c の最大公約数が１であるときを原始ピタゴラス数というが，このとき s と t は， s と t のどちらか一方は偶数で，もう片方は奇数であることが必要十分条件である．また，自然数のピタゴラス数は行列

$$P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

を用いると，すべての原始ピタゴラス数が $(3,4,5)$ から得られることが知られている [Ko]．この意味で $(3,4,5)$ は原始ピタゴラス数のオリジンと考えることができる．さらにこれに関連して橘は [Ta] の中で複素ピタゴラス数のオリジンに関する研究を行い，相対的なオリジンというペアが無数に存在していることを示し，さらにその構造について論じた．以上のことから，著者は整数環やガウス整数環以外の環で，特に非可換環でのピタゴラス数はどういったものであるのか，それに興味を覚えた．

【定義１】 A,B,C を M_3 数とする．(A,B,C) が M_3 **ピタゴラス数**であるとは，$A,\ B,\ C$ の $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分は正で

$$A^2+B^2=C^2$$

をみたすものをいう．

(注意) (A,B,C) が M_3 ピタゴラス数であるならば，$A,\ B,\ C$ の $(1,1)$ 成分の３つの数と，$(2,2)$ 成分の３つの数は自然数のピタゴラス数である．

本研究では，M_3 ピタゴラス数の中のある集合に，潜在的に可約であるという概念と真に既約という概念を与え，M_3 ピタゴラス数の分類を試みた．その結果，詳細は８節の定理で説明するが，M_3 ピタゴラス数は，原始 M_3 ピタゴラス数と呼ばれる既約な M_3 ピタゴラス数で分類できることがわかった．以下，この定理をどのようにして発見し証明したのかについて述べていく．

2　(2+3) 型の M_3 数

以下において，(A, B, C) は M_3 ピタゴラス数とし，$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$ として，M_3 数 $A,\ B,\ C$ を表記する．

さて，研究の当初においては，M_3 ピタゴラス数をどのように研究すればよいか分からず，とりあえず，コンピュータを用いていくつかの例を出してみた．その中で，$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$ が $a_1 = a_2 + a_3$ をみたすものに目が留まり，そのような A を $(2+3)$ **型の** M_3 **数**と呼んで研究をスタートさせた．そして以下の命題が成り立つことを証明した．

【命題１】 $A,\ B,\ C$ を $(2+3)$ 型の M_3 数とし，さらに $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ と $(a_3,\ b_3,\ c_3)$ は自然数のピタゴラス数とする．このとき (A, B, C) は M_3 ピタゴラス数である．

(証明)　$A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2(a_1 + a_3) \\ 0 & a_3^2 \end{pmatrix}$ であり，A は $(2+3)$ 型であるので $(1, 2)$ 成分を計算すると，

$$a_2(a_1 + a_3) = (a_1 - a_3)(a_1 + a_3) = a_1^2 - a_3^2$$

である．同様に B^2 の $(1, 2)$ 成分は

$$b_2(b_1 + b_3) = b_1^2 - b_3^2$$

であり，C^2 の $(1, 2)$ 成分は

$$c_2(c_1 + c_3) = c_1^2 - c_3^2$$

である．したがって，

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1^2 + b_1^2 - (a_3^2 + b_3^2) \\ 0 & a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1^2 - c_3^2 \\ 0 & c_3^2 \end{pmatrix} = C^2$$

であるので，(A, B, C) は M_3 ピタゴラス数である．Q.E.D.

(例１)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 4 & -20 \\ 0 & 24 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 5 & -21 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

とすると，A, B, C は $(2+3)$ 型の M_3 数であり，そして (A, B, C) は M_3 ピタゴラス数である．$\square$

ところで，上の例の A, B, C はそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

と分解する．そこで $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$，$B' = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$，$C' = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A'^2 + B'^2 = C'^2$$

が成り立つため，(A', B', C') は M_3 ピタゴラス数であることがわかる．

上の例に限らず $d_1 = \gcd(a_1, b_1, c_1)$, $d_3 = \gcd(a_3, b_3, c_3)$ とおいたとき $d_1 > 1$ または $d_3 > 1$ の場合のデータを調べると，ほとんどの場合に同様な分解が起こっていた．

3　可約と既約な M_3 ピタゴラス数の定義

前節の終わりに述べた M_3 ピタゴラス数の分解の様子から，M_3 ピタゴラス数に可約と既約という概念を定義することにした．

【定義２】$(A,\ B,\ C)$ を M_3 ピタゴラス数とする．このとき，$A,\ B,\ C$ が，共に単元でない M_3 数 $L,\ R$ によって，

$$A = LA'R \ \text{ かつ } \ B = LB'R \ \text{ かつ } \ C = LC'R$$

に分解され，さらに $A'^2 + B'^2 = C'^2$ が成り立つとき (A, B, C) は**可約**であるという．そして L を $(A,\ B,\ C)$ の**左可約係数**，R を $(A,\ B,\ C)$ の**右可約係数**という．また，可約でない M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) を**既約**であるという．

可約な M_3 ピタゴラス数 $(A,\ B,\ C)$ の分解において，R が単元であるときは $A = LA'$, $B = LB'$, $C = LC'$ と表し，L が単元であるときは $A = A'R$, $B = B'R$, $C = C'R$ と表すことにする．

(例２)　M_3 ピタゴラス数

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

は，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

と分解し，

$$A'=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix}4&3\\0&4\end{pmatrix},\quad C'=\begin{pmatrix}5&3\\0&5\end{pmatrix}$$

とおくと，$A'^2+B'^2=C'^2$ が成り立つ．すなわち，(A,B,C) は可約であり，左可約係数は $L=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ で，右可約係数は $R=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$ である．□

（注意）(a_1,b_1,c_1) と (a_3,b_3,c_3) が自然数の原始ピタゴラス数であるとき，M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) は既約である．

【定義３】(a_1,b_1,c_1) と (a_3,b_3,c_3) が自然数の原始ピタゴラス数である既約な M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) を**原始的**である，または，**原始 M_3 ピタゴラス数**という．

さて，$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$ と $(a_3,b_3,c_3)=(5,12,13)$ というように，$a_3=c_1$ であるような 2 対の自然数の原始ピタゴラス数を考えると，これから，以下のような原始 M_3 ピタゴラス数の構造をもつものが作れる．

(例３) (a_1,b_1,c_1) と (a_3,b_3,c_3) を自然数の原始ピタゴラス数とし，さらに，$c_1=a_3$ とする．このとき，M_3 数

$$A=\begin{pmatrix}a_1&\pm(a_1-a_3)\\0&a_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1&\pm(b_1-b_3)\\0&b_3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_1&\pm(c_1-c_3)\\0&c_3\end{pmatrix}$$

は，$A^2+B^2=C^2$ だけでなく

$$C^2=\begin{pmatrix}{a_3}^2&{b_3}^2\\0&{c_3}^2\end{pmatrix}$$

という構造も持つ．□

4　与えられた M_3 ピタゴラス数の既約性の判定

前節で扱った例 2 を一般的に扱えば，与えられた M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) の既約性を判定できると考えた．次の命題は可約の定義を言い換えたものである．

【命題２】(a_1,b_1,c_1) と (a_3,b_3,c_3) を自然数の原始ピタゴラス数，l_1，r_1，l_3，r_3 は零でない整数とし，原始的でない M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) を，

$$A=\begin{pmatrix}l_1r_1a_1&a_2\\0&l_3r_3a_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}l_1r_1b_1&b_2\\0&l_3r_3b_3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}l_1r_1c_1&c_2\\0&l_3r_3c_3\end{pmatrix}$$

とする．さらに，$L=\begin{pmatrix} l_1 & s \\ 0 & l_3 \end{pmatrix}$，$R=\begin{pmatrix} r_1 & t \\ 0 & r_3 \end{pmatrix}$，$A'=\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$，$B'=\begin{pmatrix} b_1 & y \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$，$C'=\begin{pmatrix} c_1 & z \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$ と置く．このとき，s,t,x,y,z に関する連立方程式

$$\begin{cases} l_1r_3x+a_1l_1t+a_3r_3s=a_2 \\ l_1r_3y+b_1l_1t+b_3r_3s=b_2 \\ l_1r_3z+c_1l_1t+c_3r_3s=c_2 \\ (a_1+a_3)x+(b_1+b_3)y=(c_1+c_3)z \end{cases}$$

に整数解 s,t,x,y,z が存在することと，(A,B,C) が可約であることは同値である．

（証明）$A=LA'R,\ B=LB'R,\ C=LC'R$ かつ $A'^2+B'^2=C'^2$ を仮定する．$A=LA'R,\ B=LB'R,\ C=LC'R$ の $(1,2)$ 成分の比較と $A'^2+B'^2=C'^2$ の $(1,2)$ 成分の計算から，連立方程式が得られる．このことから，(A,B,C) が可約であるための必要十分条件は s,t,x,y,z が整数であることである．Q.E.D.

(例４)　原始的ではない M_3 ピタゴラス数

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 15 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$$

を考える．$\gcd(8,6,10)=2$，$\gcd(15,8,17)=1$ より，$l_1=2,\ r_1=1,\ l_3=1, r_3=1$ または，$l_1=1,\ r_1=2,\ l_3=1, r_3=1$ とできる．$l_1=2,\ r_1=1,\ l_3=1, r_3=1$ のとき，連立方程式

$$\begin{aligned} &2x+8t+15s=1,\quad 2y+6t+8s=8,\quad 2z+10t+17s=5, \\ &(4+15)x+(3+8)y=(5+17)z \end{aligned}$$

から，例えば整数解 $s=3,\ t=0,\ x=-22,\ y=-8,\ z=-23$ が存在する．よって，命題２より (A,B,C) は可約である．同様にして $l_1=1,\ r_1=2,\ l_3=1, r_3=1$ のとき，$s=0,\ t=3,\ x=-11,\ y=-1,\ z=-10$ という連立方程式の解が得られる．

ここで，得られた M_3 数 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，左可約係数でも右可約係数でもあり，(A,B,C) は

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -22 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -23 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と分解する．そして，

$$\begin{pmatrix}4 & -22\\ 0 & 15\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}3 & -8\\ 0 & 8\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}5 & -23\\ 0 & 17\end{pmatrix}^2,$$

$$\begin{pmatrix}4 & -11\\ 0 & 15\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 8\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}5 & -10\\ 0 & 17\end{pmatrix}^2$$

が成り立つ．□

5　可約な M_3 ピタゴラス数と分解の可換性

具体的に与えられた M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) が可約であるか既約であるかは，命題２から判定できることがわかった．しかし，M_3 ピタゴラス数全体の様子は未だ理解できていない．そこで，M_3 ピタゴラス数にはどのようなタイプのものがあり，それらはどのような特徴があるのかを調査し，M_3 ピタゴラス数全体の様子をもう少し詳しく把握していくことにした．

まず，M_3 ピタゴラス数に D 対称という概念を定義し，D 対称な M_3 ピタゴラス数は可約なのか既約なのか調べることにした．

【定義４】M_3 数 A が，ある M_3 数 D によって $A=A'D=DA'$ と分解されるとき，A は D **対称に分解される**という．さらに，M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) で，A，B，C はそれぞれある M_3 数 D で D 対称に分解されるとき，(A,B,C) は D **対称に分解される**という．また，(A,B,C) の中のどれかが，どんな D に対しても D 対称に分解されないとき，(A,B,C) は D **非対称**であるという．

【命題３】(A,B,C) を原始的でない $(2+3)$ 型の M_3 ピタゴラス数とすると，(A,B,C) は D 対称に分解され，さらに (A,B,C) は可約である．

（証明）(A,B,C) は $(2{+}3)$ 型の M_3 ピタゴラス数であるので，$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_1-a_3\\ 0 & a_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1 & b_1-b_3\\ 0 & b_3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}c_1 & c_1-c_3\\ 0 & c_3\end{pmatrix}$ と表すことができる．可約であることを示すために，$a_1=d_1a_1', b_1=d_1b_1', c_1=d_1c_1'$ さらに $a_3=d_3a_3', b_3=d_3b_3', c_3=d_3c_3'$ とする．(A,B,C) は原始的でないので，d_1，d_3 のうちどちらかは１より大きいことから，$D=\begin{pmatrix}d_1 & d_1-d_3\\ 0 & d_3\end{pmatrix}$ とすると，D は単元ではない．さらに $A'=\begin{pmatrix}a_1' & a_1'-a_3'\\ 0 & a_3'\end{pmatrix}$, $B'=\begin{pmatrix}b_1' & b_1'-b_3'\\ 0 & b_3'\end{pmatrix}$, $C'=\begin{pmatrix}c_1' & c_1'-c_3'\\ 0 & c_3'\end{pmatrix}$ と置くと，

$$A=DA'=A'D,\quad B=DB'=B'D,\quad C=DC'=C'D$$

であり，明らかに $A'^2+B'^2=C'^2$ が成り立つ．Q.E.D.

M_3 ピタゴラス数の既約性と D 対称に分解することの関係性を研究した．そして，以下の命題を証明した．

【命題４】　(A,B,C) は原始的でない M_3 ピタゴラス数で，かつ D 対称に分解される，すなわち

$$A=A'D=DA',\ \ B=B'D=DB',\ \ C=C'D=DC'$$

であるとする．このとき (A,B,C) は可約である．

（証明）$A^2+B^2=C^2$ より $A'DA'D+B'DB'D=C'DC'D$ であり，D 対称性（可換性）より $A'^2D^2+B'^2D^2=C'^2D^2$ が成り立つ．D には逆行列が存在するので，$A'^2+B'^2=C'^2$ が成り立つ．Q.E.D.

命題４の対偶を考えると，「原始的でない M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) が既約ならば，(A,B,C) は D 非対称」となることがわかる．このことから，原始的でない M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) が D 非対称であることを判断できる量はどういったものか興味を覚えたので，そのことについて研究し，以下の命題を証明した．

【命題５】$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$ とし $D=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}$ (ただし $a_1>0$, $a_3>0$, $d_1>0$, $d_3>0$, $d_1\neq\ d_3$) とする．さらに $a_1=d_1a'_1$ かつ $a_3=d_3a'_3$ とする．このとき

$$u_a=a'_1+\frac{a'_1-a'_3}{d_1-d_3}d_3$$

と置くと，$d_2=a_2/u_a$ が成り立つことと，A が D 対称に分解されることは同値である．

(証明) A が D 対称に分解されているとする．すなわち，$D=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}$ とし．$A'D=DA'$ をみたすものとする．$A'=\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 \\ 0 & a'_3 \end{pmatrix}$ として $A'D=DA'$ の $(1,2)$ 成分をみると

$$d_1a'_2+d_2a'_3=a'_1d_2+d_3a'_2$$

が成り立つ．したがって

$$a'_2=\frac{a'_1-a'_3}{d_1-d_3}d_2$$

である．一方 $a_2=a'_1d_2+d_3a'_2$ より

$$a_2=\left(a'_1+\frac{a'_1-a'_3}{d_1-d_3}d_3\right)d_2=u_ad_2$$

が成り立つ．逆に $d_2=a_2/u_a$ を仮定する．すなわち $a_2=u_ad_2$ とする．このとき

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_1 & x \\ 0 & a'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'_1 & y \\ 0 & a'_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

と置いて $x=y$ を示す．$(1,2)$ 成分の計算より

$$u_a d_2 = d_1 x + d_2 a_3', \qquad u_a d_2 = a_1' d_2 + y d_3$$

が得られる．これより

$$d_3 y = (u_a - a_1') d_2 = \frac{(u_a - a_1') d_1 x}{u_a - a_3'} \tag{1}$$

が成り立つ．$u_a = a_1' + \dfrac{a_1' - a_3'}{d_1 - d_3} d_3$ より

$$\frac{(u_a - a_1') d_1 x}{u_a - a_3'} = \frac{\dfrac{a_1' - a_3'}{d_1 - d_3} d_3 d_1 x}{a_1' - a_3' + \dfrac{a_1' - a_3'}{d_1 - d_3} d_3} = d_3 x \tag{2}$$

である．等式 (1) と (2) より $x=y$ である．したがって，A は D 対称に分解される．Q.E.D.

(A,B,C) を原始的でない M_3 ピタゴラス数とし，さらに A,B,C はある M_3 数 D で D 対称に分解されるものとする．このとき，命題５で定義された量 u_a，u_b，u_c に関して

$$\frac{a_2}{u_a} = \frac{b_2}{u_b} = \frac{c_2}{u_c}$$

が成り立つことは M_3 ピタゴラス数の可約の判定において重要である．ここで

$$u_a = a_1' + \frac{a_1' - a_3'}{d_1 - d_3} d_3, \quad u_b = b_1' + \frac{b_1' - b_3'}{d_1 - d_3} d_3, \quad u_c = c_1' + \frac{c_1' - c_3'}{d_1 - d_3} d_3$$

である．次の命題を得ることができた．

【命題６】(A,B,C) を原始的でない M_3 ピタゴラス数とする．また $d_1 = \gcd(a_1, b_1, c_1)$，$d_3 = \gcd(a_3, b_3, c_3)$ とする．さらに， $d_1 \neq d_3$ でかつ $\dfrac{a_2}{u_a} = \dfrac{b_2}{u_b} = \dfrac{c_2}{u_c} = d_2$ で d_2 が整数であることを仮定する．このとき $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}$ と置くと，(A,B,C) は D 対称で，可約である．

(証明) 命題５より A,B,C はどれも D 対称に分解されるので，(A,B,C) は D 対称に分解される．そして，命題４より (A,B,C) は可約である．Q.E.D.

(例５) M_3 ピタゴラス数

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

を考える．$d_1 = 1$, $d_3 = 4$ であり，$a_1' = 3$, $b_1' = 4$, $c_1' = 5$, $a_3' = 4$, $b_3' = 3$, $c_3' = 5$ である．よって

$$u_a = 3 + \frac{3-4}{1-4} \times 4 = \frac{13}{3}, \quad u_b = 4 + \frac{4-3}{1-4} \times 4 = \frac{8}{3}, \quad u_c = 5 + \frac{5-5}{1-4} \times 4 = 5$$

より
$$d_2 = \frac{a_2}{u_a} = \frac{b_2}{u_b} = \frac{c_2}{u_c} = 3$$
である．したがって，(A, B, C) は可約である．実際，A, B, C の分解は
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
であり，$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^2$ が成り立つ．□

6　反射的な M_3 ピタゴラス数

M_3 ピタゴラス数にどんなものがあるかもう少し把握するために，D 対称なピタゴラス数以外に，特徴的な M_3 ピタゴラス数を考えることにした．そして，例 2 をヒントにして，次に述べる反射的な M_3 ピタゴラス数というものを研究してみた．

【定義５】(A, B, C) を原始的でない M_3 ピタゴラス数とする．そしてある自然数 γ があって，$a_3 = \gamma a_1$, $b_3 = \gamma b_1$, $c_3 = \gamma c_1$ または $a_1 = \gamma a_3$, $b_1 = \gamma b_3$, $c_1 = \gamma c_3$ であるとき，すなわち，
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \gamma a_1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 \\ 0 & \gamma b_1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_1 & a_2 \\ 0 & \gamma c_1 \end{pmatrix}$$
または，
$$A = \begin{pmatrix} \gamma a_3 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \gamma b_3 & a_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \gamma c_3 & a_2 \\ 0 & \gamma c_3 \end{pmatrix}$$
であるとき，(A, B, C) を**反射的**であるという．このとき γ を**反射係数**という．

さて，例 2 で扱った M_3 ピタゴラス数
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$
は，反射係数 $\gamma = 1$ を持つ反射的な M_3 ピタゴラス数である．一方，$d_1 = \gcd(a_1, b_1, c_1) = 3$, $d_3 = \gcd(a_3, b_3, c_3) = 3$ である．しかし，(A, B, C) が可約であるかどうかは命題 6 では判断できない．反射的な M_3 ピタゴラス数について以下の命題を証明しておく．

【命題７】 (A, B, C) を原始的でない反射的な M_3 ピタゴラス数とすると，(A, B, C) は可約である．

（証明）$\gamma > 1$ のときは左可約係数として，$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ または $L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，右可約係数 R として単位行列を考えれば明らかである．$\gamma = 1$ のとき，(A, B, C) は原始的でないので，ある自然数 u を用いて $a_1 = ua'_1$，$b_1 = ub'_1$，$c_1 = uc'_1$ とできる．そこで，$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$，$R = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，さらに

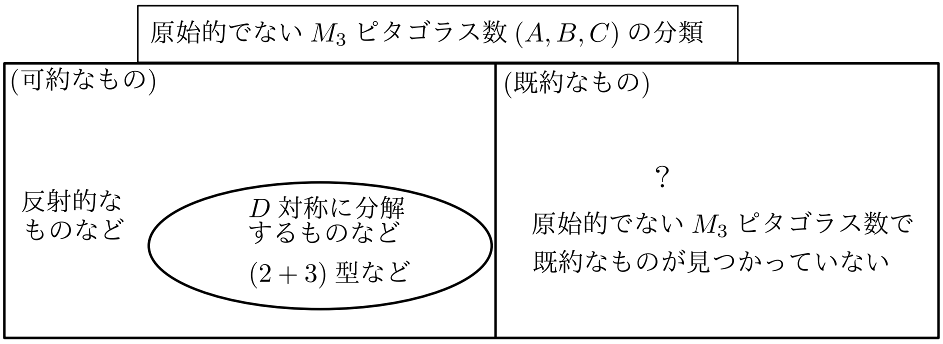
$$A' = \begin{pmatrix} a'_1 & a_2 \\ 0 & a'_1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} b'_1 & b_2 \\ 0 & b'_1 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} c'_1 & c_2 \\ 0 & c'_1 \end{pmatrix}$$

と置くと，$A = LA'R,\ B = LB'R,\ C = LC'C$ でかつ $A'^2 + B'^2 = C'^2$ が成り立つ．すなわち，(A, B, C) は可約である．Q.E.D.

7　原始的でない既約な M_3 ピタゴラス数の存在性

本研究の目的は M_3 ピタゴラス数の中にはどのようなタイプのものがあり，それらは M_3 ピタゴラス数全体の中でどのように生息しているかを研究することである．そして，M_3 ピタゴラス数の可約性，あるいは既約性をキーワードに研究を進めてきた．命題 2 を用いると，与えられた M_3 ピタゴラス数が可約か既約かどうかは判断できる．特に，既約な M_3 ピタゴラス数については，(A, B, C) が原始 M_3 ピタゴラス数であれば必ず既約になるため，原始的でない M_3 ピタゴラス数について詳細に研究する必要がある．しかし，具体的にコンピュータを用いて，原始的でない既約な M_3 ピタゴラス数を探しているが，未だその例を見つけられてない．そのため既約な M_3 ピタゴラス数にどのようなタイプがあるか理解できない状態が続いた．

このような状況を打開するために，(A, B, C) が D 対称に分解するというキーワードから研究を行ってみた．その結果，(A, B, C) が D 対称に分解されるならば可約ということがわかったので，既約になるものは D 非対称といえる．D 非対称で可約なものはたくさんあると考えられ，研究を進め，反射的なタイプの M_3 ピタゴラス数の中に，D 非対称で可約なものが多くあることを証明した．しかし，これも原始的でない既約な M_3 ピタゴラス数を見つける手掛かりにはならなかった．



8　潜在的に可約な M_3 ピタゴラス数

2017 年 2 月に原始的でない既約な M_3 ピタゴラス数として，以下の例があることを知らされた．

(例 6) 自然数のピタゴラス数 $(7, 24, 23)$ と $(8, 15, 17)$ を考え，

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 2 \cdot 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 0 & 2 \cdot 15 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 2 \cdot 17 \end{pmatrix}$$

とする．命題 2 を使って (A, B, C) の既約性を判定すると，$l_1 = r_1 = 1, l_3 = 1, r_3 = 2$ のとき，連立方程式

$$2x + 7t + 16s = 5, \ 2y + 24t + 30s = 23, \ 2z + 25t + 34s = 23, 5x + 13y = 12z$$

より，$3t + 6s = -2$ を得る．また，$l_1 = r_1 = 1, l_3 = 2, r_3 = 1$ のとき，連立方程式

$$x + 7t + 8s = 5, \ y + 24t + 15s = 23, \ z + 25t + 17s = 23, 5x + 13y = 12z$$

より，$3t + 3s = -2$ を得る．いずれの場合も s, t は整数解ではない．したがって，(A, B, C) は原始的でない既約な M_3 ピタゴラス数である．

上の例が発見され，本研究の目的である M_3 ピタゴラス数の中心的な役割を果たす集合の構造が，不確かなものに思えた．しかし，このような現象が起きたのは，M_3 ピタゴラス数の可約や既約の定義に問題があったために，その構造を捕まえることができないのではないかと考えた．

もう一度，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

とする M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) を考えよう．$A^2 + B^2 = C^2$ より $(2, 2)$ 成分だけをみると，

$$(a_1 + a_3)a_2 + (b_1 + b_3)b_2 = (c_1 + c_3)c_2$$

が成り立っている．これに注目する．

以下に新たな M_3 ピタゴラス数を定義するが，そのために $\gcd(0, b_2, c_2) = \gcd(b_2, c_2)$，$\gcd(a_2, 0, c_2) = \gcd(a_2, c_2)$ と定義しておく．以下の命題は明らかである．

【命題 8】 M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) と (A', B', C') で $a_1 = a_1', \ a_3 = a_3'$，$b_1 = b_1', \ b_3 = b_3'$，$c_1 = c_1', \ c_3 = c_3'$ であるものを考える．このとき，$a_2 | a_2'$ または $a_2' | a_2$ が成り立つとき，$(A, B, C) \sim (A', B', C')$ と定義すると，$\sim$ は同値関係である．

【定義 6】 $a_2 \geq 0$，$\gcd(a_2, b_2, c_2) = 1$ である M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) に対して，h を整数として

$$A_h = \begin{pmatrix} a_1 & ha_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} b_1 & hb_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad C_h = \begin{pmatrix} c_1 & hc_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

と置くと，(A_h, B_h, C_h) も M_3 ピタゴラス数であるので，これを (A, B, C) に対する**高さ h の M_3 ピタゴラス数**と呼ぶ．さらに，$a_2 \geq 0$，$\gcd(a_2, b_2, c_2) = 1$ である M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) の集合を，**高さ 1 の M_3 ピタゴラス数の集合**といい $\mathcal{M}_{h=1}$ と表す．

命題 8 と定義 6 によって，M_3 ピタゴラス数全体は $\mathcal{M}_{h=1}$ で直和分割されるので，$\mathcal{M}_{h=1}$ の構造を研究すればよいことになる．そして定義 2 を以下のように変更する．

【定義７】 $(A,\ B,\ C)$ を $\mathcal{M}_{h=1}$ の元とする．このとき，ある整数 h が存在して，A_h，B_h，C_h が，共に単元でない M_3 数 L，R によって，

$$A_h = LA'_hR \quad \text{かつ} \quad B_h = LB'_hR \quad \text{かつ} \quad C_h = LC'_hR$$

に分解され，さらに $A'^2_h + B'^2_h = C'^2_h$ が成り立つとき，(A, B, C) を $\mathcal{M}_{h=1}$ において**潜在的に可約**であるという．また，潜在的に可約ではない M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) を $\mathcal{M}_{h=1}$ において**真に既約**であるという．

定義 7 によって，命題 2 も次のように変わる．

【命題９】 (a_1, b_1, c_1) と (a_3, b_3, c_3) を自然数の原始ピタゴラス数，l_1，r_1，l_3，r_3 は零でない整数とし，$\mathcal{M}_{h=1}$ の元である M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) を，

$$A = \begin{pmatrix} l_1r_1a_1 & a_2 \\ 0 & l_3r_3a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} l_1r_1b_1 & b_2 \\ 0 & l_3r_3b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} l_1r_1c_1 & c_2 \\ 0 & l_3r_3c_3 \end{pmatrix}$$

とする．さらに，$L = \begin{pmatrix} l_1 & s \\ 0 & l_3 \end{pmatrix}$，$R = \begin{pmatrix} r_1 & t \\ 0 & r_3 \end{pmatrix}$，$A' = \begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$，$B' = \begin{pmatrix} b_1 & y \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$，$C' = \begin{pmatrix} c_1 & z \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$ と置く．このとき，h，s, t, x, y, z に関する連立方程式

$$\begin{cases} l_1r_3x + a_1l_1t + a_3r_3s = ha_2 \\ l_1r_3y + b_1l_1t + b_3r_3s = hb_2 \\ l_1r_3z + c_1l_1t + c_3r_3s = hc_2 \\ (a_1 + a_3)x + (b_1 + b_3)y = (c_1 + c_3)z \end{cases}$$

に整数解 h, s, t, x, y, z が存在することと，(A, B, C) が $\mathcal{M}_{h=1}$ において潜在的に可約であることは同値である．

【命題１０】 M_3 ピタゴラス数 (A, B, C) において，$\sigma_a = a_1 + a_3$，$\sigma_b = b_1 + b_3$，$\sigma_c = c_1 + c_3$ と置き，さらに $\tau = \sigma_a a_1 + \sigma_b b_1 - \sigma_c c_1$，$\tau' = \sigma_a a_3 + \sigma_b b_3 - \sigma_c c_3$ と置くと，$\tau = \tau'$ が成り立つ．

（証明）(a_1, b_1, c_1) と (a_3, b_3, c_3) は自然数のピタゴラス数であるので，$\tau = a_1a_3 + b_1b_3 - c_1c_3$，$\tau' = a_1a_3 + b_1b_3 - c_1c_3$ より，$\tau = \tau'$ である．Q.E.D.

以下の定理を証明する．

【定理】 $\mathcal{M}_{h=1}$ の元である M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) が，$\mathcal{M}_{h=1}$ において真に既約であることと原始的であることは同値である．

（証明）(A,B,C) は原始的でないとする．このとき，命題 9 の連立方程式をみたす整数解 h,s,t,x,y,z が存在することは，未知数を h,s,t とする一次方程式

$$\tau l_1 t + \tau r_3 s = h(\sigma_a a_2 + \sigma_b b_2 - \sigma_c c_2)$$

の解が整数であることと同値である．$d = \gcd(\tau l_1, \tau r_3)$ と置くと，以下の補題により，$h = d$ とすれば，整数解 s,t をもつことがわかる．よって，(A,B,C) は潜在的に可約である．Q.E.D.

【補題】(参照 [Tg], 定理 1.7) 整数 a,b,k に対して，方程式 $ax+by=k$ が整数解 $(x,\ y)$ を持つための必要十分条件は k が $d=\gcd(a,b)$ で割り切れることである．

9　M_3 ピタゴラス数の分類のまとめ

M_3 ピタゴラス数の分類を以下にまとめる．

まず，M_3 ピタゴラス数 (A,B,C) に対して，$A^2+B^2=B^2+A^2$ と A,B,C の $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分を入れ換えた A',B',C' も $A'^2+B'^2=C'^2$ であることから，以下の 3 種類の M_3 ピタゴラス数は同一視する．

$$\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_3 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_3 & c_2 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\right\}$$

そして，上の M_3 ピタゴラス数の同一視を認めた M_3 ピタゴラス数全体を $\mathcal{M}$ とする．

次に，$\mathcal{M}$ の部分集合である高さ 1 の M_3 ピタゴラス数の集合 $\mathcal{M}_{h=1}$ を考える．$\mathcal{M}_{h=1}$ は前節で説明したように，$\mathcal{M}$ を代表する集合である．すなわち，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}_{h=1}$ によって直和分割されるため，$\mathcal{M}_{h=1}$ の構造が $\mathcal{M}$ の構造を決めることになる．

$\mathcal{M}_{h=1}$ の構造を研究するために，$\mathcal{M}_{h=1}$ の元である M_3 ピタゴラス数に，潜在的に可約な M_3 ピタゴラス数と，真に既約な M_3 ピタゴラス数という概念を定義した．その結果，前節の定理を証明することができ，これにより $\mathcal{M}_{h=1}$ の真に既約な M_3 ピタゴラス数は原始的であることがわかった．

以上のことから，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}_{h=1}$ の原始 M_3 ピタゴラス数により分類できることがわかった．

10　3 乗 M_3 ピタゴラス数

現在，M_3 ピタゴラス数の研究に平行して，3 乗 M_3 ピタゴラス数というものを定義して研究を行っている．

【定義８】（A, B, C, D）が 3 乗 M_3 ピタゴラス数であるとは，A, B, C, D の $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分は正で

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

をみたすものをいう．

自然数におけるこの種の研究は，オイラーやハーディー，ラマヌジャンなどの研究が知られている．しかし，部分的にはその構造は明らかにされてきてはいるが，全容を現す結果は未だ得られていない [WM]．それでも自然数の結果を睨みながら，M_3 数上での研究を行うことで，M_3 数特有の構造が浮かび上がるのではないかと期待している．さらに k 乗 M_3 ピタゴラス数を同様に定義し，一般的な研究を行うことも考えている．

謝辞

査読の先生方には，本論文を注意深く読んでいただき，特に可約の定義などに関する助言は，本研究結果を誤解のないように表現する上で，非常に有益なものとなりました．また，M_3 ピタゴラス数に関する重要な例も与えていただき，例 2 と例 6 としてあげさせていただきました．ここに深くお礼を申し上げます．

参考文献

[Ho] 堀源一郎，ハミルトンと四元数，海鳴社，2007 年

[Ko] 小林吹代，ピタゴラス数を生み出す行列のはなし，ベレ出版，2008 年

[Ta] 橘智子, 複素ピタゴラス数の構造について , 津山代数幾何シンポジウム 2012 報告集, pp202-211(2013 年 2 月)

`http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algegeo_index.html`

[Tg] 高木貞治, 初等整数論講義　第 2 版, (1993 年 6 月)

[WM] Diophantine Equation-3rd Powers, Wolfram MathWorld,

`http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation3rdPowers.html`