

(研究レポート)

n 次元凸多面体の変形に関する研究

長谷川 隼平 (代表), 漆島 洋歩, 宮路 伶音

(津山工業高等専門学校 3 年)

研究期間: 2023 年 4 月 1 日 ~ 9 月 28 日

0. はじめに

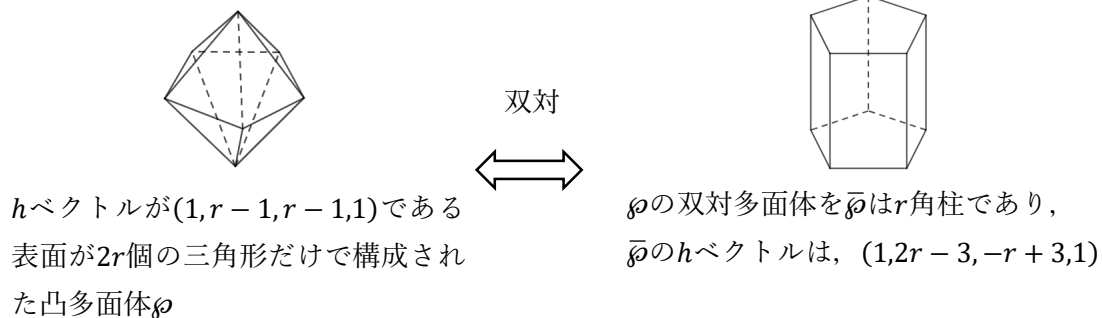
オイラーの多面体定理は、穴の開いていない凸多面体において、 $F + V - E = 2$ という式が成り立つというもので、とてもよく知られている定理である。ここで、 F , V , E は面の数, 頂点の数, 辺の数をそれぞれ表す。この定理は、穴の開いていない凸多面体をトポロジ的に変形させると球に変形できるという意味を含んでいる。しかし、オイラーの多面体定理は、どのような多面体が存在するかといった問いに対しては、意味をなさない。つまり、 $F + V - E = 2$ をみたす数 F, V, E を与えたとき、それらの数をもつ凸多面体が存在するかどうかを知ることはできない。私たちはより強い条件を必要とする。1980年代に、 **g 定理**と呼ばれる定理が Billera-Lee, Stanley によって証明された ([1]参照)。 g 定理は三角形の面だけで構成された凸多面体が存在するための頂点の数, 辺の数, 面の数にいくつかの特別な条件を与えている。

私たちは三角形の面だけで構成された凸多面体以外の凸多面体が存在するための条件は何かという問題にチャレンジしている。私たちの計画は、ある凸多面体をいくつかの三角形の面だけで構成された凸多面体に変換する方法を見つけることである。この計画から、**私たちは三角形の面だけで構成された凸多面体以外の凸多面体が存在するための条件を見つけることができるだろうと考えている**。さらに、私たちの発見した条件を、存在する n 次元の超凸多面体はどのようなものかという問題に拡張させる予定である。

1. 研究結果の概要

私たちの研究対象は、 n 次元空間の中の **n 次元凸多面体**であり、以下、 n 次元凸多面体を $\wp$ という記号であらわす。ここで、 $\wp$ が凸であるとは、 $\wp$ の2点を結んだ直線上の任意の点が $\wp$ の内点であるということである。2次元凸多面体は多角形、3次元凸多面体は多面体、4次元凸多面体は多胞体のことである。

表面が三角形だけで構成された3次元空間内の凸多面体 $\wp$ で、自然数 $r \geq 2$ に対して、 h ベクトル（第3節で説明する）が $(1, r-1, r-1, 1)$ であるものが存在することは、 g 定理より証明できる。そこで、 $\wp$ の双対多面体を $\bar{\wp}$ を考えると、これは r 角柱であり、そして $\bar{\wp}$ の h ベクトルは $(1, 2r-3, -r+3, 1)$ となる。



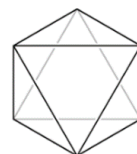
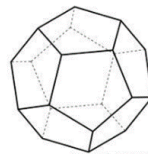
詳細は後節で述べるが、私たちが独自に考えた PMT という変形を使って得られた結果の概要を、簡単に説明する。

r 角柱である $\bar{\wp}$ に PMT を k 回（ただし、 $1 \leq k \leq r-2$ ）行くと、 h ベクトルが $(1, 2r-3, -r+1+k, 1)$ の凸多面体 $\bar{\wp}_k$ を構成できる。私たちはこの凸多面体 $\bar{\wp}_k$ を台形的多角柱と呼んでいる。また、 $\bar{\wp}$ に PMT を $r-2$ 回行くと、 h ベクトルが $(1, 2r-3, 0, 1)$ である台形的多角柱 $\bar{\wp}_{r-2}$ が得られ、 $\bar{\wp}$ に PMT を $r-1$ 回行くと、 h ベクトルが $(1, 2r-3, 1, 1)$ である $(2r-1)$ 角錐 $\bar{\wp}_r$ が得られる、という結果を得たのである。すなわち、 g 定理より存在が証明された h ベクトルが $(1, r-1, r-1, 1)$ である表面が三角形だけで構成された凸多面体 $\wp$ を考えたとき、 $\wp$ の双対多面体 $\bar{\wp}$ から、PMT によって存在する凸多面体の f ベクトルと h ベクトルを算出することができたのである（主結果1参照）。

次に私たちは、私たちの3次元の凸多面体の結果を、表面が三角錐だけで構成された4次元空間内の凸多面体 $\wp$ に応用し、 $\wp$ の双対多面体を $\bar{\wp}$ を考え、私たちのPMTという変形を考えることで、存在する4次元凸多面体 $\bar{\wp}_k$ の f ベクトルと h ベクトルのいくつかの結果を得ることができた。

2. 単体的 n 次元凸多面体とは

点は0単体、線は1単体、三角形は2単体、三角錐は3単体、4次元の三角錐は4単体と呼ばれ、 n 次元空間の三角錐は n 単体と呼ばれている。 n 次元空間の n 単体をいくつかつなぎ合わせて作られている n 次元凸多面体のことを**単体的 n 次元凸多面体**という。



単体的でない3次元凸多面体（左）と単体的3次元凸多面体（右）

3. n 次元凸多面体の f ベクトルと h ベクトル

3次元凸多面体 $\wp$ を考える。 $\wp$ の頂点の個数を f_0 、辺の個数を f_1 、面の個数を f_2 とする。このとき、 $f(\wp) = (f_0, f_1, f_2)$ を $\wp$ の **f ベクトル**という。オイラー・ポアンカレの公式より

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2$$

であることが知られている。

次に、4次元凸多面体 $\wp$ を考える。 $\wp$ の頂点の個数を f_0 、辺の個数を f_1 、面の個数を f_2 、そして $\wp$ を構成する3次元物体の個数を f_3 とする。 $f(\wp) = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ を $\wp$ の **f ベクトル**という。このとき、4次元凸多面体オイラー・ポアンカレの公式は

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$$

となる。

一般に、 n 次元空間の n 次元凸多面体 $\wp$ を考える。 $\wp$ の頂点の個数を f_0 、辺の個数を f_1 、面の個数を f_2 、そして $\wp$ を構成する r 次元物体の個数を f_r ($0 \leq r \leq n-1$) とする。このとき、 $f(\wp) = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ を $\wp$ の **f ベクトル**という。そして、 n 次元凸多面体のオイラー・ポアンカレの公式は

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ 2 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

となる。20世紀のはじめごろ以下の数学的問題が提示された。

問題1. 数列 $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ が与えられたとき、これを $f(\wp) = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ となる n 次元凸多面体 $\wp$ が存在するための $f(\wp)$ の条件は何か？

4. h ベクトルと g 定理

3次元凸多面体 $\wp$ の f ベクトルを $f(\wp) = (f_0, f_1, f_2)$ とする。

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & f_0 & f_1 & f_2 & 1 \\ 1 & f_0 - 1 & f_1 - f_0 + 1 & f_2 - f_1 + f_0 - 1 & & & \\ 1 & f_0 - 2 & f_1 - 2f_0 + 3 & & & & \\ 1 & f_0 - 3 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{array}$$

このとき、上の図のように、数列 $(1, f_0, f_1, f_2, 1)$ を上部において、下方へパスカル三角形の逆操作を行うと、最下方の右斜めに

$$(1, f_0 - 3, f_1 - 2f_0 + 3, f_2 - f_1 + f_0 - 1) = (1, f_0 - 3, f_1 - 2f_0 + 3, 1)$$

という数列が得られる. $h(\wp) = (1, h_1, h_2, h_3) = (1, f_0 - 3, f_1 - 2f_0 + 3, 1)$ と置いて, これを $\wp$ の **h ベクトル**という.

一般に, 数列 $(1, f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, 1)$ を上部において, 下方へパスカル三角形の逆操作で作って得られた $h(\wp) = (1, h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1})$ を n 次元凸多面体 $\wp$ の **h ベクトル**という.

実は, 4次元以上の空間において, 問題1を考えることは非常に困難となっていたため, 問題1は以下の問題2に修正された.

問題2. 数列 $(h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$ が与えられたとき, $h(\wp) = (h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$ となる n 次元凸多面体 $\wp$ が存在するための **$h(\wp)$ の条件**は何か?

問題2を考えるにあたり, Macaulay という数学者が, 以下の計算法を定義した ([1]参照).

定義1. a, i を正の整数とすると, $a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{a_j}{j}, (a_i > a_{i-1} > \dots > a_j > 1)$ と一通りに展開できる. このとき, $a^{(i)}$ を

$$a^{(i)} = \binom{a_i + 1}{i + 1} + \binom{a_{i-1} + 1}{i} + \dots + \binom{a_j + 1}{j + 1}$$

と定義する.

例えば, $28 = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2}$ なので, $28^{(4)} = \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} = 40$ である.

問題2は, 1980年代に, 単体的 n 次元凸多面体 $\wp$ に関して, Billera-Lee, Stanley によって解決された. それが以下の定理である ([1], [3]参照).

定理1. $h_0 = 1$ で数列 $(h_0, h_1, h_2, \dots, h_n)$ が与えられたとき, $h(\wp) = (h_0, h_1, h_2, \dots, h_n)$ をもつ単体的 n 次元凸多面体 $\wp$ が存在するための **$h(\wp)$ の必要十分条件**は, 以下の(1), (2), (3)が成り立つことである.

$$(1) \ h_i = h_{n-i} \quad (2) \ 1 = h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (3) \ h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{(i)} \quad (1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$$

ここで, 記号 $[x]$ は実数 x の整数部を表す.

定理1を簡単にいえば, h ベクトルが, 左右対称であり, 左半分の数列が増加で, 右半分の数列が減少であるとき (たとえば, $h(\wp) = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$ など), そのような **h ベクトル**をもつ単体的 n 次元凸多面体は存在するというものである.

3次元凸多面体に関しては, 存在条件に関する以下の重要な定理がある ([2]参照).

定理2. $\wp$ が3次元凸多面体であるためには,

$$E = V + F - 2, \quad V \leq 2F - 4, \quad F \leq 2V - 4$$

がすべてみたされることが必要十分条件である.

私たちは、私たちの研究のために有用となる 2 つの補題を証明した。

補題 1. $\wp$ を n 次元凸多面体とする。 $\wp$ を $n+1$ 次元空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ に埋め込んで、 $\mathbf{R}^{n+1}$ の $\wp$ の頂点ではない 1 点と $\wp$ の各頂点を繋いでできる $n+1$ 次元多面体 $\wp'$ は、凸多面体である。

補題 2. $\wp$ を n 次元凸多面体とし、 $\wp'$ を補題 1 で構成した $n+1$ 次元凸多面体とする。 このとき、 $\mathbf{R}^{n+1}$ の $\wp'$ の頂点ではない 1 点をうまく選ぶと、 $\wp$ の各頂点を繋いでできる $n+1$ 次元多面体は、凸多面体となる。

さて、私たちの研究において、錐は重要な凸多面体の 1 つである。 2 次元錐 $\wp$ は r 角形のことであり、 3 次元錐 $\wp$ は r 角形 $\wp$ に 3 次元方向の 1 点から $\wp$ のすべての点に線をつないで得られた底面が r 角形の錐のことである。 そして 4 次元錐 $\wp$ は 3 次元錐 $\wp$ に 4 次元方向の 1 点から $\wp$ のすべての点に線をつないで得られた錐のことである。 補題 1 により、このようにして、 $n-1$ 次元錐から帰納的に定義された n 次元錐 $\wp$ は凸多面体である。



私たちの研究対象である 3 次元錐 $\wp$ は、底面が r 角形で、側面に三角形が r 個ある r 角錐である。 したがって、 r 角錐 $\wp$ は、 $f(\wp) = (r+1, 2r, r+1)$, $h(\wp) = (1, r-2, 1, 1, 1)$ である。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & r+1 & 2r & r+1 & 1 & \\ 1 & r & r & 1 & & \\ 1 & r-1 & 1 & & & \\ 1 & r-2 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}$$

4 次元錐 $\wp$ は、 $f(\wp) = (r+2, 3r+1, 3r+1, r+2)$, $h(\wp) = (1, r-2, 1, 1)$ である。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & r+2 & 3r+1 & 3r+1 & r+2 & 1 \\ 1 & r+1 & 2r & r+1 & 1 & \\ 1 & r & r & 1 & & \\ 1 & r-1 & 1 & & & \\ 1 & r-2 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}$$

次に、重要な凸多面体として r 角柱がある。 そして 4 次元 r 角柱 $\wp$ は 3 次元 r 角柱 $\wp$ を 4 次元方向にコピーし、対応する各頂点を繋いで得られた柱のことである。 このようにして、 n 次元 r 角柱 $\wp$ は $n-1$ 次元 r 角柱から帰納的に定義される。



3次元 r 角柱 $\wp$ は、底面が r 角形で、側面に四角形が r 個あるものである。したがって、 r 角柱 $\wp$ は、 $f(\wp) = (2r, 3r, r+2)$, $h(\wp) = (1, 2r-3, -r+3, 1)$ である。

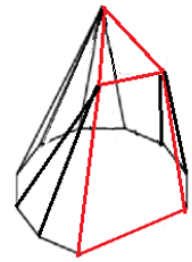
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2r & 3r & r+2 & 1 & \\ 1 & 2r-1 & r+1 & 1 & & \\ 1 & 2r-2 & -r+3 & & & \\ 1 & 2r-3 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}$$

4次元 r 角柱 $\wp$ は、 $f(\wp) = (4r, 8r, 5r+4, r+4)$, $h(\wp) = (1, 4r-4, -4r+6, r, 1)$ である。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4r & 8r & 5r+4 & r+4 & 1 \\ 1 & 4r-1 & 4r+1 & r+3 & 1 & \\ 1 & 4r-2 & 3 & r & & \\ 1 & 4r-3 & -4r+6 & & & \\ 1 & 4r-4 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}$$

5. 台形的多角柱について

3次元凸多面体の研究において、現在の私たちの研究対象は、3次元台形的多角柱（これは私たちが勝手に名付けた名称）というものである（右図参照）。**台形的多角柱**とは、底面が r 角形、上面が s 角形、そして、側面が三角形と四角形だけで構成された凸多面体のことである。底面が r 角形、上面が s 角形、側面が四角形 j 個と三角形 k 個をもつ台形的多角柱を $[r, s; 4^j, 3^k]$ で表し、これを**台形的多角柱のタイプ**と呼ぶ。特に、 $[r, r; 4^r]$ は r 角柱、 $[r; 3^r]$ は r 角錐を表す。



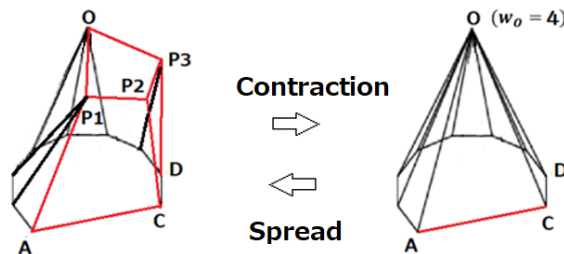
台形的多角柱

『**台形的多角柱は単体的凸多面体とどのような関係にあるのか？**』

これが私たちの研究テーマである。

6. 3次元台形的多角柱の変形について

私たちは、3次元台形的多角柱を研究する上で、頂点の重さが w_0 の r 角錐というものを考える必要があった。それは、 $[r, s; 4^j, 3^k]$ の上面の s 角形を頂点 O に潰してできた r 角錐のことであり、これを $w_0 = s$ の **r 角錐**と呼ぶ。このとき、 $w_0 = s$ の r 角錐の頂点の数は $r+s$ と考える。これに注意する。そしてこの操作を**Contraction**と呼ぶ。

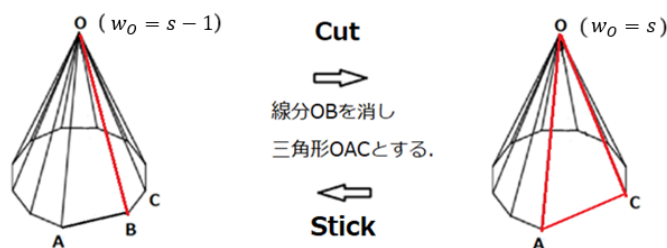


上面 $OP_1P_2P_3$ の4角形を頂点 O の潰して得られる $w_0 = 4$ の n 角錐

また、私たちは上の変換の逆変換も重要であると考え、上の変換の逆変換、すなわち重さ $w_0 = s$ の頂点を r 角形に広げる変換を**Spread**と呼ぶことにした。

さらに、 $w_0 = s-1$ の n 角錐から $w_0 = s$ の $r+1$ 角錐への変形を以下の図のように定義した。すなわち、『 $w_0 = s-1$ の r 角錐の側面の $OABC$ の中の線分 OB を削り、残された OAC を三角形に整えて $r+1$ 角錐を作

る。そのとき、点Oの重さは $w_O = s$ になったとする』のである。



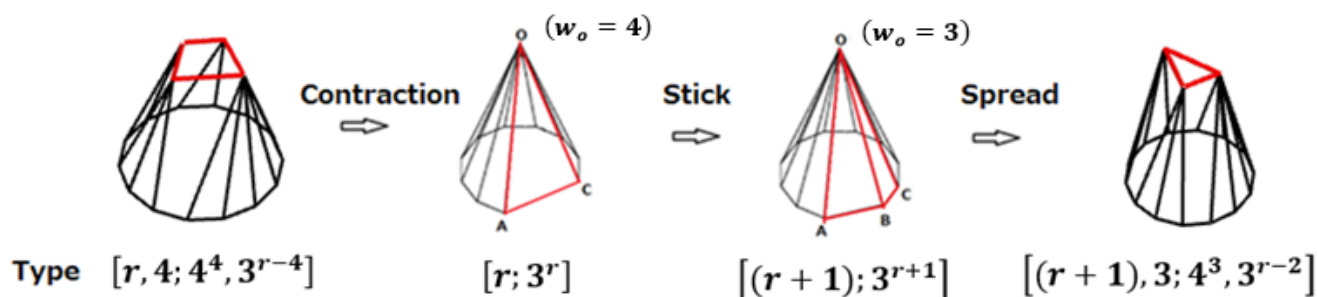
私たちはこの変換を **Cut** と呼ぶことにした。Cut の定義から、多角柱の頂点の数は $r + s$ と変わらないことに注意する。さらに、Cut 逆操作を **Stick** と呼ぶことにした。

定義 (Point Move Transformation, PMT)

タイプ $[r, s; 4^j, 3^k]$ の台形的多角柱に対して、まず Contraction によって、 $w_O = s$ の r 角錐を作り、次に Stick によって $w_O = s - 1$ の $r + 1$ 角錐を作り、最後に Spread によって、タイプ $[r + 1, s - 1; 4^{j'}, 3^{k'}]$ の台形的多角柱を得る操作を、頂点を動かして変形していくことから、Point Move Transformation, 略して **PMT** と呼ぶ。

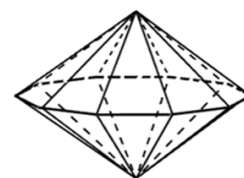
以下は、タイプ $[r, 4; 4^4, 3^{r-4}]$ の台形的多角柱を PMT で変換してタイプ $[(r + 1), 3; 4^3, 3^{r-2}]$ の台形的多角柱を得る変換を表した例である。

PMTの例



7. 3次元台形的多角柱に関する研究結果

f ベクトルが $f(\wp) = (r + 2, 3r, 2r)$ 、 h ベクトルが $h(\wp) = (1, r - 1, r - 1, 1)$ であるタイプ $[3^{2r}]$ の単体的凸多面体 $\wp$ は（図 7.1）、 g 定理により存在する。例えば、双 r 角錐がある。PMT により、私たちは、まず、以下の結果を得た。



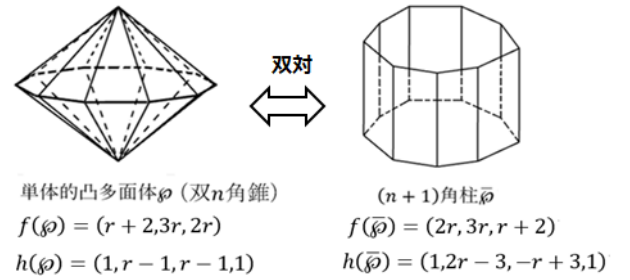
（図 7.1）

主結果 1. $r \geq 3$ とする. f ベクトルが $f(\wp) = (r + 2, 3r, 2r)$, h ベクトルが $h(\wp) = (1, r - 1, r - 1, 1)$ であるタイプ $[3^{2r}]$ の双 r 角錐 $\wp$ を考える. このとき $\wp$ の双対多面体 $\bar{\wp}$ と, k 回の PMT から得られる台形的多角柱 $\bar{\wp}_k$ ($0 \leq k \leq r - 3$), $\bar{\wp}_{r-2}$ と $\bar{\wp}_{r-1}$ は, それぞれ以下の通りである.

	タイプ	f ベクトル	h ベクトル
$\bar{\wp}$	$[r^2; 4^r]$	$(2r, 3r, r + 2)$	$(1, 2r - 3, -r + 3, 1)$
$\bar{\wp}_k$	$[(r + k), (r - k); 4^{r-k}, 3^{2k}]$	$(2r, 3r + k, r + 2 + k)$	$(1, 2r - 3, -r + 3 + k, 1)$
$\bar{\wp}_{r-2}$	$[(2r - 2); 4^2, 3^{2r-4}]$	$(2r, 4r - 3, 2r - 1)$	$(1, 2r - 3, 0, 1)$
$\bar{\wp}_{r-1}$	$[(2r - 1); 3^{2r-1}]$	$(2r, 4r - 2, 2r)$	$(1, 2r - 3, 1, 1)$

主結果 1 の証明の概略

$(r + 1)$ 角柱 $\bar{\wp}$ を考える. $\bar{\wp}$ のどの頂点からも線が丁度 3 本出ているので, $\bar{\wp}$ の双対多面体は $\wp$ は単体的凸多面体である. そして簡単な計算から, $\bar{\wp}$ の f ベクトルは, $f(\bar{\wp}) = (2r, 3r, r + 2)$ であり, $\bar{\wp}$ の h ベクトルは, $h(\bar{\wp}) = (1, 2r - 3, -r + 3, 1)$ で, $\wp$ の f ベクトルは, $f(\wp) = (r + 2, 3r, 2r)$ であり, $\wp$ の h ベクトルは $h(\wp) = (1, r - 1, r - 1, 1)$ であることが, すぐにわかる.



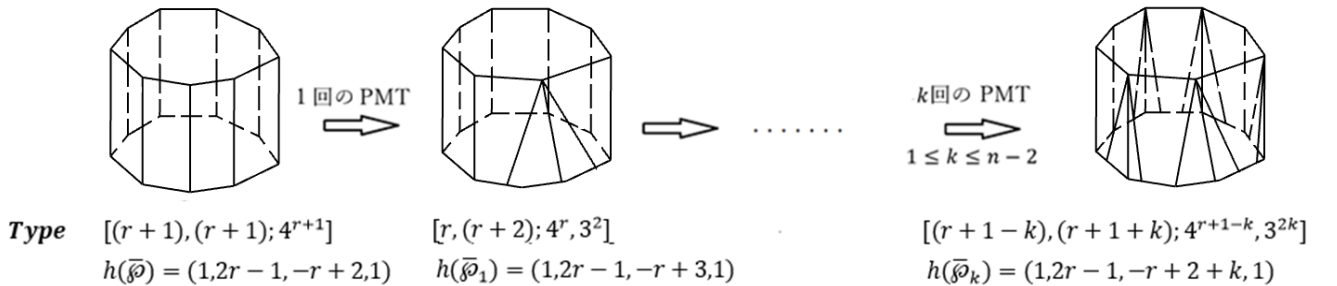
また, $\bar{\wp}$ のタイプは $[r, r; 4^r]$ である. $\bar{\wp}$ に 1 回の PMT を行って得られる台形的多面体 $\bar{\wp}_1$ のタイプは $[(r + 1), (r - 1); 4^{r-1}, 3^2]$ である. そして簡単な計算から,

$$f(\bar{\wp}_1) = (2r, 3r + 1, r + 3), \quad h(\bar{\wp}_1) = (1, 2r - 3, -r - 2, 1)$$

となることがわかる. これを繰り返して, k 回 (ただし, $1 \leq k \leq r - 3$) の PMT を行って得られる台形的多面体のタイプが $[(r + k), (r - k); 4^{r-k}, 3^{2k}]$ となり, これより

$$f(\bar{\wp}_k) = (2r, 3r + k, r + 2 + k), \quad h(\bar{\wp}_k) = (1, 2r - 3, -r + 3 + k, 1)$$

も得られる.



$k = r - 3$ のとき $\bar{\wp}_{r-3}$ のタイプは $[(2r - 3), 3; 4^3, 3^{2r-6}]$ で

$$f(\bar{\wp}_{r-3}) = (2r, 4r - 3, 2r - 1), \quad h(\bar{\wp}_{r-3}) = (1, 2r - 3, 0, 1)$$

なので, $\bar{\wp}_{r-3}$ に PMT を行って得られる台形的多面体 $\bar{\wp}_{r-2}$ のタイプは $[2r - 2; 4^2, 3^{2r-4}]$ となる. これより,

$$f(\bar{\wp}_{r-2}) = (2r, 4r - 3, 2r - 1), \quad h(\bar{\wp}_{r-2}) = (1, 2r - 3, 0, 1)$$

となる. 最後に, $\bar{\wp}_{r-2}$ に PMT を行って得られる台形的多面体 $\bar{\wp}_{r-1}$ のタイプは $[2r - 1; 3^{2r-1}]$, つまり $2r + 1$ 角錐となる. そして,

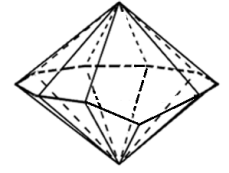
$$f(\bar{\wp}_{r-1}) = (2r, 4r - 2, 2r), \quad h(\bar{\wp}_{r-1}) = (1, 2r - 3, 1, 1)$$

となる．（証明の概略終）

次に、双 r 角錐を考え、その上部の2つの三角形だけを Cut として得られるタイ

プ $[4, 3^{2r-2}]$ の凸多面体 $\wp$ を考える（図 7.2）．これは定理 2 より凸多面体である．

主結果 1 と同様な証明方法で、次の結果を得た．



（図 7.2）

主結果 2. $r \geq 4$ とする．双 r 角錐を考え、その上部の2つの三角形だけを Cut としたタイプ $[4, 3^{2r-2}]$ の凸多面体 $\wp$ を考える．このとき $\wp$ の双対多面体 $\bar{\wp}$ と、 k 回の PMT から得られる台形的多角柱 $\bar{\wp}_k$ ($0 \leq k \leq r-4$)、 $\bar{\wp}_{r-3}$ と $\bar{\wp}_{r-2}$ は、それぞれ以下の通りである．

	タイプ	f ベクトル	h ベクトル
$\bar{\wp}$	$[r, (r-1); 4^{r-1}, 3]$	$(2r-1, 3r-1, r+2)$	$(1, 2r-4, -r+4, 1)$
$\bar{\wp}_k$	$[(r+k), (r-1-k); 4^{r-1-k}, 3^{2k+1}]$	$(2r-1, 3r-1+k, r+2+k)$	☆
$\bar{\wp}_{r-3}$	$[2r-3; 4^2, 3^{2r-5}]$	$(2r-1, 4r-5, 2r-2)$	$(1, 2r-4, 0, 1)$
$\bar{\wp}_{r-2}$	$[2r-2; 3^{2r-2}]$	$(2r-1, 4r-4, 2r-1)$	$(1, 2r-4, 1, 1)$

ただし、☆は $(1, 2r-4, -r+4+k, 1)$ である．

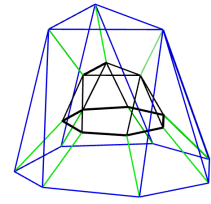
8. 4次元の台形的多角柱について

4次元凸多面体の研究における私たちの研究対象は、4次元台形的多角柱というものである（右図参照）．**4次元台形的多角柱**とは、3次元台形的多角柱を用意し、そのコピーを作り、そのコピーを第4の空間へ単位長さだけ移動させ、移動したコピーの頂点と元の3次元台形的多角柱の頂点を全て線で繋いで得られる4次元物体のことである．したがって、4次元台形的多角柱には、構成するとき用いた3次元台形的多角柱から r 面体が3個、 s 面体が1個が得られ、その間に五面体（三角柱）と六面体（四角柱）がそれぞれいくつか張り付いている．以上のことから、4次元台形的多角柱のタイプを

$$[r^3, s; 6^j, 5^k]$$

と表す．

研究テーマ 『4次元台形的多角柱は単体的凸多面体とどのような関係にあるのか？』



タイプ $[9^3, 5; 6^3, 5^4]$ の
4次元台形的多角柱の投影図

9. 4次元台形的多角柱のPMT

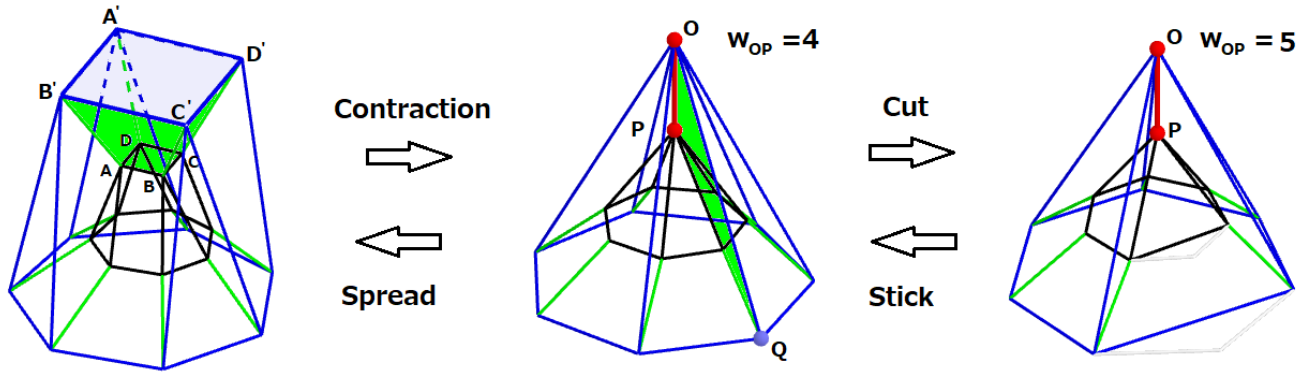
私たちは、4次元の凸多面体に関する研究を行うために4次元台形的多角柱のPMTを考えた．

定義（4次元台形的多角柱のPMT）

（1）3次元台形的多角柱の上面と、それを4次元空間にコピーしたものの上面との間の3次元 s 角柱を直線 OP に潰して4次元錐を作ること **Contraction**，その逆を **Spread** という．このとき、直線 OP の重さを $w_{OP} = s$ とする．

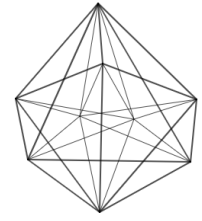
（2）潰された4次元錐の直線 OP と4次元錐の1つの頂点 Q の間にある面 OPQ を取り除くことを **Cut** といい、その逆を **Stick** という．このとき、直線 OP の重さを $w_{OP} = s + 1$ とする．

（3）最初に Contraction，次に Stick，そして Spread という変換を **PMT** という．



10. 4次元の凸多面体に関する研究結果

まず, f ベクトルが $f(\wp) = (r+4, 5r+4, 8r, 4r)$, h ベクトルが $h(\wp) = (1, r, 2r, r, 1)$ であるタイプ $[4^{4r}]$ の4次元双 r 角錐 $\wp$ (図 10.1) を考える. 補題 2 より $\wp$ は凸多面体である. その双対多面体 $\bar{\wp}$ と, 私たちが考えた PMT から得られる台形的多角柱 $\bar{\wp}_k$ の研究を行った. 以下がその結果である.



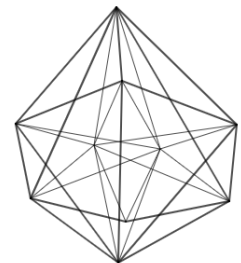
(図 10.1)

主結果 3. $r \geq 3$ とする. f ベクトルが $f(\wp) = (r+4, 5r+4, 8r, 4r)$, h ベクトルが $h(\wp) = (1, r, 2r-2, r, 1)$ であるタイプ $[4^{4r}]$ の4次元双 r 角錐 $\wp$ を考える. このとき $\wp$ の双対多面体 $\bar{\wp}$ と, k 回の PMT から得られる台形的多角柱 $\bar{\wp}_k$ ($0 \leq k \leq r-3$), $\bar{\wp}_{r-2}$ と $\bar{\wp}_{r-1}$ は, それぞれ以下の通りである.

	タイプ	f ベクトル	h ベクトル
$\bar{\wp}$	$[(r+2)^4; 6^r]$	$(4r, 8r, 5r+4, r+4)$	$(1, 4r-4, -4r+6, r, 1)$
$\bar{\wp}_k$	$[(r+2+k)^3, (r+2-k); 6^{r-k}, 5^{2k}]$	$\heartsuit$	$\diamond$
$\bar{\wp}_{r-2}$	$[2r, (2r-1)^2; 6^2, 5^{2r-4}]$	$(4r, 10r-6, 8r-5, 2r+1)$	$(1, 4r-4, -2r, 3, 1)$
$\bar{\wp}_{r-1}$	$[(2r+1), (2r)^2; 5^{2r-1}]$	$(4r, 10r-4, 8r-2, 2r+2)$	$(1, 4r-4, -2r+2, 2, 1)$

ここで, $\heartsuit$ は $(4r, 8r+2k, 5r+4+3k, r+4+k)$, $\diamond$ は $(1, 4r-4, -4r+6+2k, r-k, 1)$ である.

次に, f ベクトルが $f(\wp) = (r+4, 5r+3, 8r-3, 4r-2)$, h ベクトルが $h(\wp) = (1, r, 2r-3, r-1, 1)$ であるタイプ $[5^2, 4^{4r-4}]$ の4次元凸多面体 $\wp$ (図 10.2) を考える. やはり $\wp$ は補題 2 より凸多面体である. その双対多面体 $\bar{\wp}$ と, PMT から得られる台形的多角柱 $\bar{\wp}_k$ の研究を行った. 以下がその結果である.



(図 10.2)

主結果 4. $r \geq 4$ とする. f ベクトルが $f(\wp) = (r + 4, 5r + 3, 8r - 3, 4r - 2)$, h ベクトルが $h(\wp) = (1, r, 2r - 3, r - 1, 1)$ であるタイプ $[5^2, 4^{4r-4}]$ の 4 次元凸多面体 $\wp$ を考える. このとき $\wp$ の双対多面体 $\bar{\wp}$ と, k 回の PMT から得られる台形的多角柱 $\bar{\wp}_k$ ($0 \leq k \leq r - 4$), $\bar{\wp}_{r-3}$ と $\bar{\wp}_{r-2}$ は, それぞれ以下の通りである.

	タイプ	f ベクトル	h ベクトル
$\bar{\wp}$	$[(r + 2)^3, (r + 1); 6^{r-1}, 5]$	$(4r - 2, 8r - 3, 5r + 3, r + 4)$	$(1, 4r - 6, -4r + 9, r - 1, 1)$
$\bar{\wp}_k$	$[(r + 2 + k)^3, (r + 1 - k); 6^{r-1-k}, 5^{2k+1}]$	$\clubsuit$	$\heartsuit$
$\bar{\wp}_{r-3}$	$[(2r - 1), (2r - 2)^2; 6^2, 5^{2r-5}]$	$(4r - 2, 10r - 11, 8r - 9, 2r)$	$(1, 4r - 6, -2r + 1, 3, 1)$
$\bar{\wp}_{r-2}$	$[2r, (2r - 1)^2; 5^{2r-2}]$	$(4r - 2, 10r - 9, 8r - 6, 2r + 1)$	$(1, 4r - 6, -2r + 3, 2, 1)$

ここで, $\clubsuit$ は $(4r - 2, 8r - 3 + 2k, 5r + 3 + 3k, r + 4 + k)$, $\heartsuit$ は $(1, 4r - 6, -4r + 9 + 2k, r - 1 - k, 1)$ である.

1 1. n 次元の凸多面体に関する今後の研究の方向性

$\wp^{(3)}$ をタイプ $[3^{4r}]$ の 3 次元双 r 角錐とする. 私たちが証明した補題 2 を用いると, $\wp^{(3)}$ を 4 次元空間に埋め込んで, 適当な 2 点から $\wp^{(3)}$ の各頂点を繋いで得られる 4 次元多面体 $\wp^{(4)}$ は凸とすることができる. このとき, その f ベクトルは $f(\wp^{(4)}) = (r + 4, 5r + 4, 8r, 4r)$, h ベクトルは $h(\wp^{(4)}) = (1, r, 2r, r, 1)$ である. 私たちは, 定理 3 から, $\wp^{(4)}$ の双対多面体 $\bar{\wp}^{(4)}$ の PMT によって得られる凸多面体の構造を決定することができた.

そこで, さらに, $\wp^{(4)}$ を 5 次元空間に埋め込んで, 適当な 2 点から $\wp^{(4)}$ の各頂点を繋いで得られる 5 次元多面体 $\wp^{(5)}$ は, 補題 2 より凸多面体とすることができるので, $\wp^{(5)}$ の双対多面体 $\bar{\wp}^{(5)}$ の PMT によって得られる凸多面体の構造を研究することができる. そしてこの方法により, 私たちは一般の n 次元空間のこの種の凸多面体 $\wp^{(n)}$ を得ることができて, そして, $\wp^{(n)}$ の双対多面体 $\bar{\wp}^{(n)}$ の PMT によって得られる凸多面体 $\bar{\wp}^{(n)}$ の構造を研究することができると考えている.

参考文献

- [1] 日比孝之, ‘数え上げ’ の世界, J. STAGE 47 巻 3 号, 1995 年, p. 256-268
- [2] 吉田健一, 数学展望-I-2006 講義ノート「第 5 回 単体的複体 (正多面体の展開図との関係)
- <https://ocw.nagoya-u.jp/courses/0055-%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%B1%95%E6%9C%9B-I-2006/>
- [3] 枘田幹也, 単体的セル分割の単体の数, 数理解析研究所講究録 1393 巻 2004 年 88-95