研究レポート

ビエトの公式から見るπの収束

武田　侑真　（津山高専 3 年）

研究期間　2021,5-2021,9

１．研究の目的と動機

津山高専数学クラブ入部時の私は、どのような研究をすればよいのか見当がつかないでいた。そんな研究題材を探していた時に出会ったのが以下に示すビエトの公式である。

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots=\frac{2}{\pi}$$

ビエトの公式は分母に 2 が、分子には$\sqrt{2}$が規則的に用いられた無限積の収束値が$\frac{2}{\pi}$であるという非常に興味深いものである。当時の私がビエトの公式を研究対象にした理由は、規則的な美しさを持ったこの式がπを導出するということに単に驚いたからである。

ビエトの公式は1593年にフランスの数学者フランソワ・ビエトによって示された歴史ある公式であるが、いまだ発展の余地が残されていると私は考えた。そこで私が着目したのは、ビエトの公式の規則性とπを導出しているという点である。この 2 点からビエトの公式の発展とπに関する理論への展開を目的として研究を行った。

２．先行研究の要約

先行研究によってビエトの公式の証明がいくつか示されている。私が今回の研究で参考にしたのは、以下に示すオイラーの公式によるものである。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$$

オイラーの公式は sin の 2 倍角公式から証明されることが知られており、この公式に$x=\frac{\pi}{2}$を代入することによってビエトの公式が証明される。

３．ビエトの公式の発展１

ビエトの公式の証明過程において、オイラーの公式に$x=\frac{\pi}{n}$を代入することで以下の定理が得られる。

定理１　以下の式が成り立つ。

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^k n}\right)=\frac{n}{\pi}$$

４．ビエトの公式の発展２

ビエトの公式の規則性から以下の式が考えられる。これを式１とする。

式 1

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}}{n}\cdots\quad(n\geqq 2)$$

これはビエトの公式の 2 の部分をnに変換したものだが、$n>2$では 0 に収束する。

表 1（$n\geqq 2$における数値）

n	2	3	4	5	100
$\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$	0.707⋯	0.480⋯	0.353⋯	0.275⋯	0.010⋯
$\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots}}}{n}$	1	0.557⋯	0.383⋯	0.290⋯	0.010⋯

その根拠となるのは表 1 に示したデータから求まる以下の不等式である。

$$0\leqq\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\leqq\cdots\leqq\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots}}}{n}<0.6\quad(n>2)$$

この不等式は式 1 $(n>2)$の初項から最終項までの範囲を表しているので、式 1 の収束値は、はさみうちの原理によって 0 であるとわかる。

$$0\leqq\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}{n}\ldots<\lim_{k\to\infty}0.6^k=0\quad(n>2)$$

５．ビエトの公式の発展 3

前節によって式 1 $(n>2)$は 0 に収束することが分かったが、それではビエトの公式の発展としてはとてもつまらないものである。そこでビエトの公式、すなわち式 1$(n=2)$がなぜ$\frac{2}{\pi}$に収束したのかを考えた。前節と同様の議論によって以下の不等式が求まる。

$$0.7<\frac{\sqrt{2}}{2}<\cdots<\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}{2}=1$$

これによると、ビエトの公式の最終項は 1 に収束していることがわかる。これがビエトの公式が 0 に収束していない根拠であると仮定し式 1 を改良した式 2 を作成した。これをビエト一般式とする。

式２（ビエト一般式）

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\varphi_n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}{\varphi_n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}}{\varphi_n}\cdots \quad (n \geqq 2)$$

$$\varphi_n=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots}}$$

ここでφ_nを具体的に定義するために、次のようにして考えた。

(1)　$x=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots}}$と置く。

(2)　$x=\sqrt[n]{n+x}$と変換する。

(3)　方程式$x^n-x-n=0$の正の実数解をφ_nと定義する。

しかしφ_nが複数存在すると、式２が一意に定まらないので問題である。そこで以下の定理が考えられる。

定理２　　方程式$x^n-x-n=0$はただ一つの正の実数解をもつ。

（証明）　前提として、$x^n-x-n=0$の解は正の実数解のみを考える。ここで、

$$f(x)=x^n-x-n \quad (x>0)$$

と置く。$f(x)$の微分より、

$$f'(x)=nx^{n-1}-1$$

$f(x)$の極値を求めるために、$f'(x)=0$を解く。

$$nx^{n-1}-1=0$$

$$x^{n-1}=\frac{1}{n}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\left(\cos\frac{2\pi}{n-1}k+i\sin\frac{2\pi}{n-1}k\right) \quad (k=0,1,2,\cdots,n-2)$$

今回は正の実数解のみを考えるので$k=0$の時のみを考える。

$$x = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

以上より表２に示す増減表が得られる。

表２　関数$f(x)$の増減表

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-n$	↘	$f\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\right)$	↗

この増減表からグラフの概形がわかる。以下の図１～４は、関数$f(x) = x^n - x - n$の$n =$ 2,3,4,5 のグラフである。これらを見れば、関数$f(x) = x^n - x - n$の正のx軸との交点が１つであることが確認される。したがって、方程式$x^n - x - n = 0$はただ一つの正の実数解φ_nをもつことが証明された。これにより、以下の定義が成り立つ。

定義１　　方程式$x^n - x - n = 0$の正の実数解をφ_nと定義する。

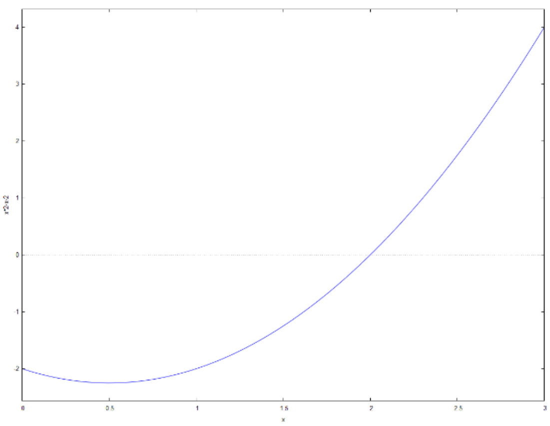

図１　$f(x) = x^2 - x - 2$のグラフ

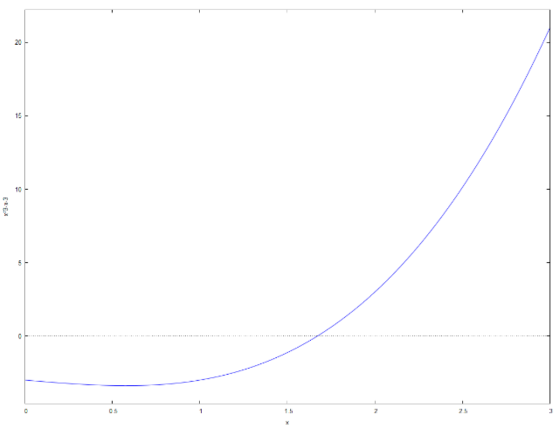

図２　$f(x) = x^3 - x - 3$のグラフ

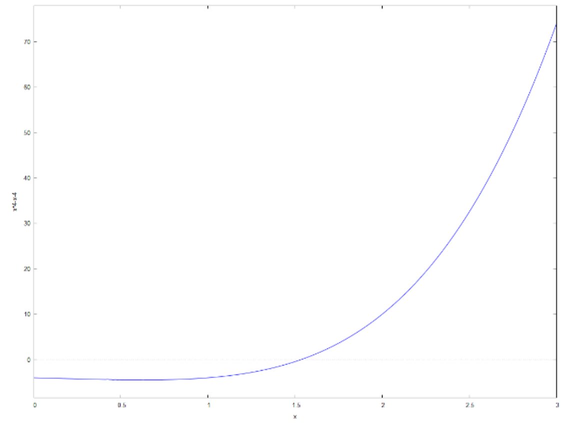

図 3　$f(x) = x^4 - x - 4$のグラフ

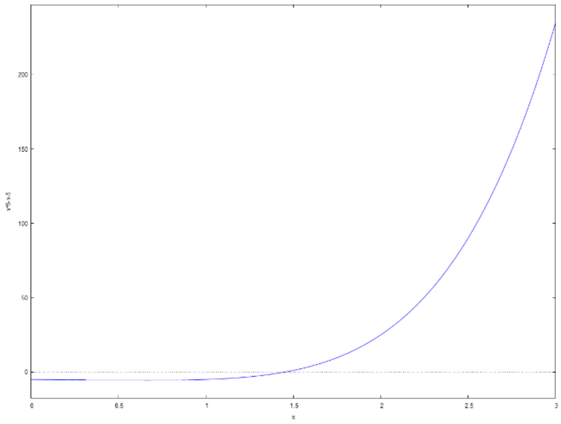

図 4　$f(x) = x^5 - x - 5$のグラフ

以下の表 3 に示すのは、φ_nの近似値である。このデータからφ_nはn が大きくなるにつれて 1 に収束することが予想される。また、このφ_nの値を式 2 に代入したときの近似値を表 4 に示す。表 4 からはnが大きくなるほど 1 に近づくことがわかるが、nが少なくとも 10000 以上になると 1 を超えてしまうので 1 に収束はしないと予想される。

ここで、ビエトの公式の発展ということでビエト一般式の右辺をビエトの公式と同様の形で表現する。この時考えられる形は以下の 2 通りである。

表 3　φ_nの近似値

n	φ_n	n	φ_n
2	2	8	1.32186
3	1.67169	9	1.29573
4	1.53375	10	1.27411
5	1.45190	100	1.04723
6	1.39582	1000	1.00693
7	1.35425	10000	1.00092

表 4　ビエト一般式にφ_nを代入した時の近似値

n	近似値	n	近似値
2	0.63661	8	0.98073
3	0.84646	9	0.98495
4	0.91666	10	0.98794
5	0.94805	100	0.99989
6	0.96466	1000	0.99999
7	0.97447	10000	1.00000

ビエト一般式の発展 1

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\varphi_n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}{\varphi_n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}}{\varphi_n}\dots=\frac{n}{\pi_n}$$

ビエト一般式の発展 2

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\varphi_n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}{\varphi_n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}}}{\varphi_n}\dots=\frac{\varphi_n}{\pi_n}$$

発展 1 では分子にnを、発展 2 では分子にφ_nを置き、分母にはπ_nという数値を置くことにする。このπ_nの近似値を表 5 と表 6 に示す。表 5 のデータより、分子がnであるときはπ_nは発散し、表 6 のデータより、分子がφ_nであるときは 1 に近い値に収束すると考えられる。後者に関しては、表 3 および表 4 のデータからも同様の結論に至る。今後は、π_nを収束値が存在しそうなビエト一般式の発展 2 のπ_nのみを考えることとする。

表５　ビエト一般式の発展１のπ_nの近似値

n	近似値	n	近似値
2	3.14159	8	8.15718
3	3.54414	9	9.13743
4	4.36362	10	10.12202
5	5.27395	100	100.01045
6	6.21978	1000	1000.00135
7	7.18336	10000	9999.99855

表６　ビエト一般式の発展２のπ_nの近似値

n	近似値	n	近似値
2	3.14159	8	1.34783
3	1.97491	9	1.31552
4	1.67317	10	1.28966
5	1.53145	100	1.04734
6	1.44695	1000	1.00693
7	1.38973	10000	1.00092

これらから以下の予想が立てられる。

予想１　（π_nの範囲）

$$1 < \pi_n \leqq \pi \quad (n = 2,3,4,\dots)$$

６．今後の研究計画

今後はビエト一般式に関する研究を続けて、さらに本研究で登場したπ_nの正体を解明したいと考えている。具体的には、以下の事項に取り組む。

（１）　ビエト一般式が収束することの証明を行う。

（２）　ビエトの公式から得られた方程式$x^n - x - n = 0$の解の代数的表記する。

（３）　π_nの正体と、π_nとπとの関係性を解明する。

（４）　πに関する他公式の一般化を試みる。

どのような研究をすればよいか悩んでいた時期に以下の式に出会った。

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\dots=\frac{2}{\pi}$$

これはビエトの公式と呼ばれ非常に美しい構造を持った式である。私はこの式がなぜ成り立ち、どのような理論に展開できるのかに興味を持ったので本研究を行った。

本研究は式の構造の規則性を見つけ、それを一般化して発展させながら行った。

結果としては、ビエトの公式から考えられる方程式$x^n-x-n=0$がただ一つの正の実数解をもち、それがビエトの公式およびビエト一般式に対して興味深い関係性をもっていることが分かった。また、ビエト一般式から求まるπ_nなる数値が求まった。

これらのことから、ビエトの公式の発展は非常に興味深い結果を導き、他のπに関する式も同様の議論ができる可能性を示唆した。

今後はビエト一般式の収束の証明と方程式$x^n-x-n=0$の代数的表記を行いたいと考えている。