

ルーロー模様のフーリエ解析

加田紘大

津山工業高等専門学校総合理工学科（4年）

1. 研究の動機と目的

高専1年生から昨年まで、ルーロー三角形に興味をもち研究を行なってきた[1]。ルーロー三角形とは、正三角形 ABC の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一辺となる円弧を結んでできた膨らみをもった三角形 ABC のことである（図1）。私は、円 A 、円 B 、円 C の半径を1とし、 A 、 B 、 C の位置を正三角形 ABC に配置したとき、3つの円が交差してできる内側の凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ （図2）や、凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ （図3）を研究した。そして、ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の角に関するある種の公式（第2節参照）を得ることができた。

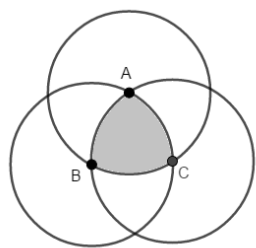


図1 ルーロー三角形

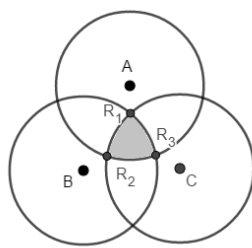


図2 凸型ルーロー正三角形

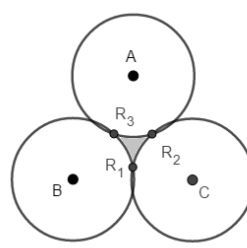


図3 凹型ルーロー正三角形

今年度は円をたくさん描いてルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ を平面全体に規則的に並べた図形全体を研究してみようと考えた。図4は、ある規則でルーロー正三角形を平面全体に規則的に並べてできた模様の異なる3つの例である。私はこれらの模様の特徴を示す尺度が定義できないかと思い、この研究を行なうことにした。また、フーリエ解析は高専で習ったばかりの数学で、これを使って研究してみたいという動機もある。

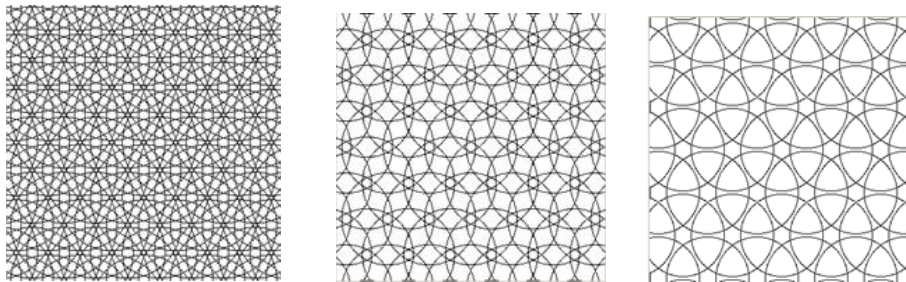


図4 多くの円を規則的に並べてできる模様の例

2. これまでの研究結果

凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ を作る 3 つの円 A, B, C の隣り合う 2 つの円の外側の交点を X, Y, Z として, それらを中心とした円 X, 円 Y, 円 Z をそれぞれ描くと, その中心に凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ ができる. 私のこれまでの結果の 1 つを述べると, 凸型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の接線によって作られる一つの角を α とし, 凹型ルーロー正三角形 $R_1R_2R_3$ の一つの角を β とすると,

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}$$

が成り立つというものである[1].

この研究は Geogebra というフリーソフトを用いて行なった. このソフトのおかげで, 上に述べた研究以外にも一般の 2 次曲線に関するルーロー三角形に関する掛谷問題といった研究にも取り組んだ[2].

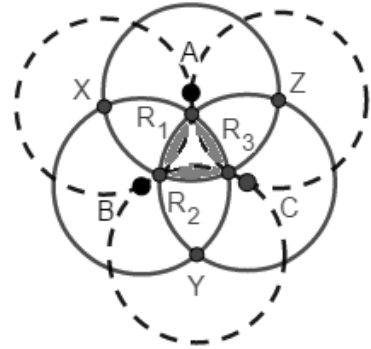


図5 ルーロー三角形の角

3. ルーロー模様 $R(d)$

研究対象であるルーロー模様 $R(d)$ を定義する.

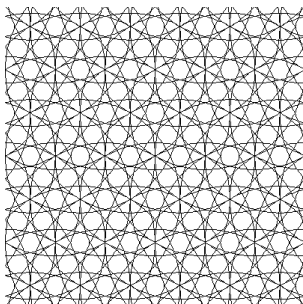
- (1) d を正の実数とする.
- (2) 実 2 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ を考え, その基底を $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とする. そして $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ から作られる格子 Λ を

$$\Lambda = \{a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbf{Z}\}$$

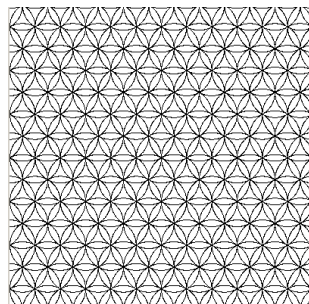
とする.

- (3) 格子 Λ の全ての格子点を中心とする半径 1 の円を描く.

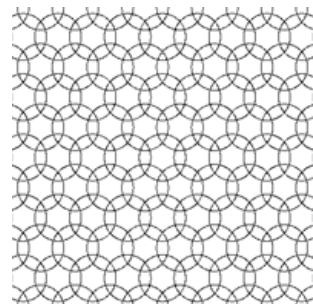
このようにして描いた無数の円で埋めつくされた平面を, ルーロー模様 $R(d)$ という.



$R(0.5)$



$R(1.0)$



$R(1.5)$

図6 ルーロー模様 $R(d)$

4. ルーロー模様 $R(d)$ と平面結晶群

平面結晶群 Γ は17種類に分類されることが分かっている．平面結晶群 Γ の17種類の名称はICU (International Union of Crystallography) による記法が広く用いられており，アルファベット (**p, c, m, g**) は，以下の頭文字である．

p: primitive **c**: centered **m**: mirror **g**: glide reflection

そして，記法で用いられる数字は，回転の位数を表す．さらに，平面結晶群 Γ は，実平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点 $\mathbf{x}$ に対し， $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ の2方向の平行移動で生成される格子群

$$\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2} = \langle \mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \rangle$$

を正規部分群にもち， $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}$ の基本領域の形で17種類の分類がなされている（ただし，基本領域の取り方は一通りには決まらない）（[3],[4]参照）．

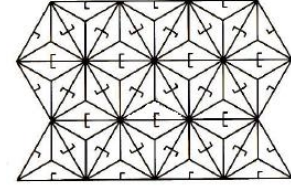
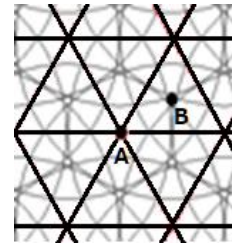
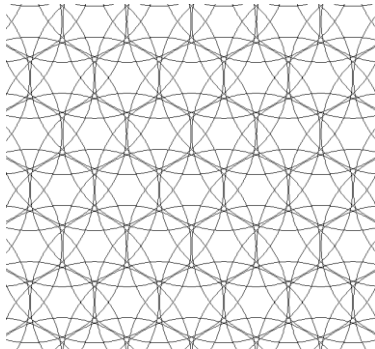


図7 p31m

さて，本研究で扱うルーロー模様 $R(d)$ は，作り方から全て六画格子になっており，位数3の回転（ $2\pi/3$ 回転），3方向の鏡映の軸，3方向の並進鏡映の軸をもち，回転の中心として鏡映の軸上にないものがある**p31m**六角格子と呼ばれている平面結晶群に分類される．



（2点A, Bは，どちらもルーロー模様の $2\pi/3$ 回転対称の中心である）

図8 p31m六角格子の結晶群をもつルーロー空間 $R(0.67)$

参考までに，図8の $R(0.67)$ を2次元FFTで処理した画像が図9である．これはフリーソフトImageJで行った．内側が低周波，外側にいくほど高周波となっており，白いほどその位置の周波数の振幅が大きいことを示している． $R(d)$ は六画格子になるように作ってあるので，3軸方向に対称性があることは当然である．しかし，この方法ではこれ以上の望む結果を得ることはできない．

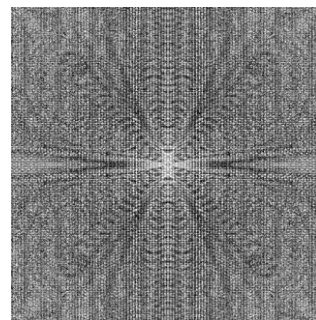


図9 $R(0.67)$ の2次元FFTの画像

今回の研究のテーマは， d によって $R(d)$ の

模様の特徴を示す尺度を発見することであり、定義した尺度から得られる数値と d にどのような関係式があるのかを研究することである。

以下の節で、今回行なった具体的な研究方法とその結果を示していく。

5. ルーロー模様 $R(d)$ の交点密度エネルギー

初等幾何学では相似という概念がある。これは拡大縮小を無視して形が同じであるということを示す概念である。そして、辺の長さや面積などの尺度を用いると、相似である形の違い（大きさという漠然とした概念）を表すことができる。前節で、ルーロー模様 $R(d)$ は一般的にp31m六角格子という文様群であることを説明した。文様群は初等幾何でいう相似という概念に対応すると考える。しかし同じ文様群p31m六角格子でも図6を見ると d によって模様（漠然とした概念）が異なる。初等幾何で辺の長さや面積などの尺度で大きさの違いを表すことができたように、この模様の違いを表す尺度を発見できないだろうか。

私は、周期的な模様が発する光の波によって、その違いが現れているのではないかと考えた。このことから、ルーロー模様 $R(d)$ から何らかのデータを取得し、それらのデータを高専で学んだフーリエ解析を行って研究してみればよいのではないかと考えた。では数学的には何のデータをとればよいのだろうか。

私は、規則的な模様を見るという行為を、瞬間的に一部の領域を捉えて、その次に視点の位置をずらして（平行移動して）、そしてそれをくり返し行なうことだと考えた。これをヒントに、視線が感知する領域を半径1の円領域とし、そこで交点の数を数えていく。そして円領域を水平方向へ微小に平行移動させ、各領域での交点の数をデータとしてとってみようと考えた。

以上の考えを10進BASICでプログラムし、以下の手順で平行移動する半径1の円領域内の交点の密度のデータをとることにし、そして得られたデータをエクセルでFFT解析することにした。

交点の密度のデータ取得の方法とFFT解析

- (1) 半径1の円領域を準備して、その領域内に交点があるかをカウントする。
- (2) 円領域の中心を x 方向に微小にずらし、その領域に交点があるかをカウントし、交点密度を交点数/ 2π としてデータをエクセルファイルに保存する。そしてこれを、交点の配置が1周期くるまでくり返す。すなわち、図10のように円領域の中心をAからBまでずらしていく。
- (3) FFT解析（Fast Fourier Transformation）を行なうため、交点密度のデータ取得回数は32回とする。
- (4) エクセルのFFT解析を使って、 $e^{i\omega t + 2\pi/32}$ の振幅スペクトル $C(\omega)$ （ $0 \leq \omega \leq 16$ ）を算出する。ここで、 ω を16個としているのは、残りの半分はFFTの対称性により意味がないからである。

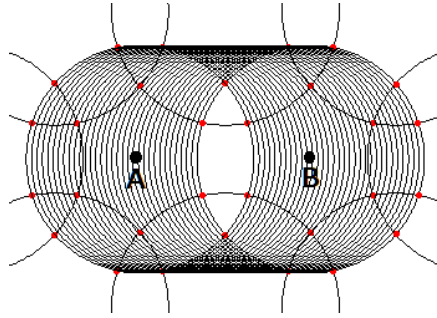


図 1 0 $R(1.5)$ 上で円領域内の交点数のデータを取得する様子

表 1 は, $R(1.5)$ の交点密度のデータであり, 図 1 1 はそのグラフである.

表 1 $R(1.5)$ の交点数と交点密度

	交 点 数	交 点 密 度		交 点 数	交 点 密 度		交 点 数	交 点 密 度		交 点 数	交 点 密 度
1	14	1.98059	9	12	1.69765	17	10	1.41471	25	11	1.55618
2	12	1.69765	10	8	1.13176	18	8	1.13176	26	12	1.69765
3	12	1.69765	11	8	1.13176	19	8	1.13176	27	12	1.69765
4	12	1.69765	12	8	1.13176	20	8	1.13176	28	12	1.69765
5	12	1.69765	13	8	1.13176	21	8	1.13176	29	12	1.69765
6	12	1.69765	14	8	1.13176	22	8	1.13176	30	12	1.69765
7	12	1.69765	15	8	1.13176	23	8	1.13176	31	12	1.69765
8	12	1.69765	16	8	1.13176	24	8	1.13176	32	11	1.55618

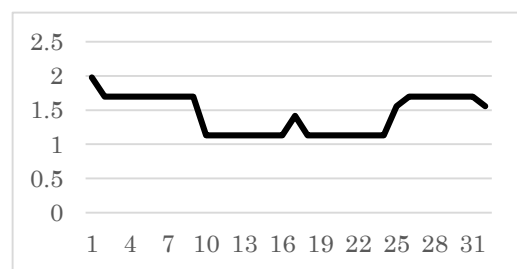
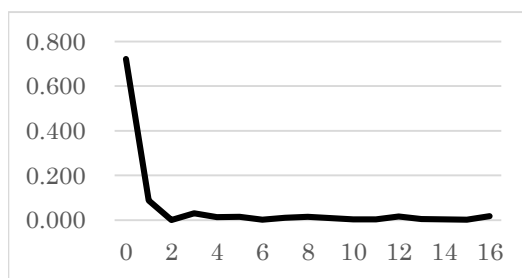


図 1 1 $R(1.5)$ の交点密度のグラフ

表 2 は周波数 ω に対する FFT の結果 $(a + bi)$ と, 振幅スペクトル $C(\omega) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \frac{1}{32}$ である. 素直に FFT 解析した結果が, 図 1 2 のグラフである. $C(0)$ が最大になっており, 次に大きいのが $C(1)$ である. この結果はほとんどの d についていえることであった. (注意. 表 2 の $E(\omega)$ はこの後に定義する周波数 ω の交点密度エネルギーを意味する.)

表 2 $R(1.5)$ の FFT の結果

ω	FFT の結果 ($a + bi$)	$C(\omega)$	$E(\omega)$
0	46.120	0.721	0.000
1	5.61-0.169i	0.088	0.015
2	$1.077 \times 10^{-2} - 5.414 \times 10^{-2}i$	0.001	0.000
3	$1.076 \times 10^{-2} - 5.413 \times 10^{-2}i$	0.031	0.017
4	$-1.983 + 6.287 \times 10^{-2}i$	0.014	0.006
5	0.890-0.100i	0.016	0.013
6	0.980-0.259i	0.002	0.000
7	$8.733 \times 10^{-2} - 0.130i$	0.011	0.012
8	$-0.717 + 2.718 \times 10^{-3}i$	0.016	0.031
9	0.990-0.141i	0.009	0.013
10	0.492-0.280i	0.004	0.003
11	0.195-0.130i	0.004	0.003
12	$-0.223 + 2.384 \times 10^{-2}i$	0.017	0.084
13	1.090-0.100i	0.006	0.011
14	0.289-0.220i	0.004	0.007
15	$0.272 - 5.413 \times 10^{-2}i$	0.002	0.002
16	$8.301 \times 10^{-2} + 0.113i$	0.018	0.160
$E_{pt}(1.5)$			0.379

図 1.2 $\omega - C(\omega)$ のグラフ

ほとんどの d で図 1.2 のようなグラフが得られるということはどういうことなのか. 私は模様 $R(d)$ の x 方向の周期性が周波数 $\omega = 0, 1$ に支配されていることを意味すると考えた. しかし, 周波数 $\omega = 0$ は, 視覚的な光の刺激には影響しないはずなので, 周波数 $\omega = 1$ が p31m 六角格子の平面結晶群をもつ $R(d)$ の x 方向の周期性に対応すると考えられる. それでは, 同じ p31m 六角格子の平面結晶群をもちながら, d による模様の違いを表している要因は何な

のだろうか．表2の $C(\omega)$ を詳しく見ると， $\omega \neq 0,1$ のときも $C(\omega) \neq 0$ である．それはどんな周波数も模様の違いに影響を与えていると考えることができる． $C(\omega)$ をうまく使って模様の違いに影響を与えるような $R(d)$ の尺度を定義すればよい．そこで，物理で習った角振動数 ω ，振幅 A で単振動をしている質量 m の物体がもつ力学的エネルギー E が，

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

という式で表されることから ([5]参照)，交点密度エネルギーという考えを思いついた．それは， $m = 1$ とし， ω をFFTで考える周波数 ω ， A を $2C(\omega)$ として置き換えることであった．

交点密度エネルギーの定義

各局所単位円においてその交点密度をデータとしてとり，FFT解析から得られる振幅スペクトル $C_\omega(0 \leq \omega \leq 16)$ に対し， $E(\omega) = (2\omega C(\omega))^2 / 2$ を振動数 ω の交点密度エネルギーといい， $E(\omega)$ の総和を $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ と呼ぶ．

模様 $R(1.5)$ の交点密度エネルギーは， $E_{pt}(1.5) = 0.379$ であった (表2)．

6. $R(d)$ の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ の調査結果

交点をカウントすることを考えたとき，数式で処理するプログラムを作ることはできなかった．今回は，1つの円を描かせ，次の円を描くときに，画像において円が交わったピクセルがあったらカウントするアルゴリズムでプログラムを作った．また， $d = 1$ などの特殊なものは交点が2重点でなく3重点以上の重複度をもち，このような場合は密度エネルギーが小さく計算されるので，以下のデータでは無視した．以下に， $0.5 \leq d \leq 1.6$ の $R(d)$ に関する交点エネルギー $E_{pt}(d)$ の一般的な d のデータを列挙する．

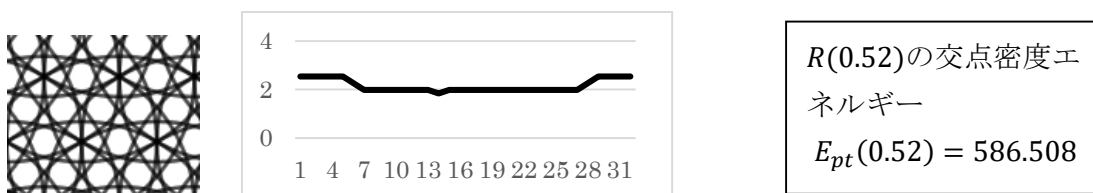


図1.3 ルーロー模様 $R(0.52)$ と交点密度のグラフ

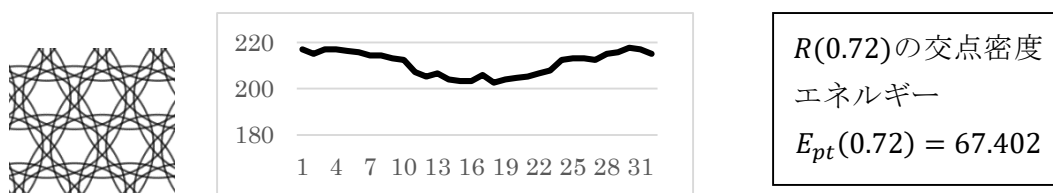
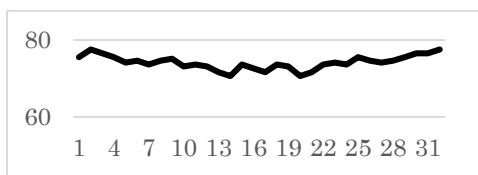
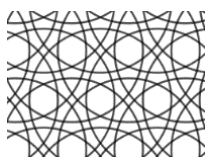
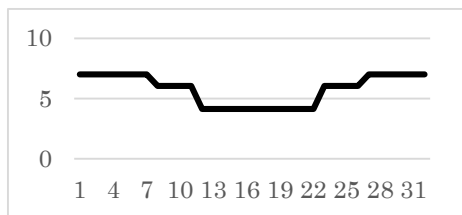
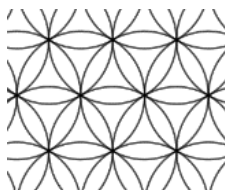


図1.4 ルーロー模様 $R(0.72)$ と交点密度のグラフ



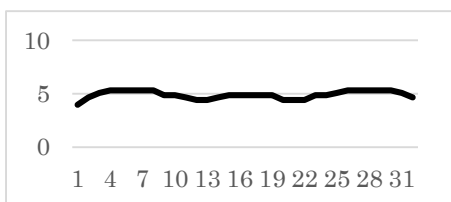
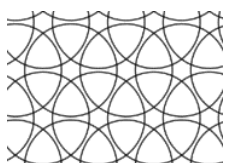
$R(0.83)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(0.83) = 24.118$

図 1 5 ルーロー模様 $R(0.83)$ と交点密度のグラフ



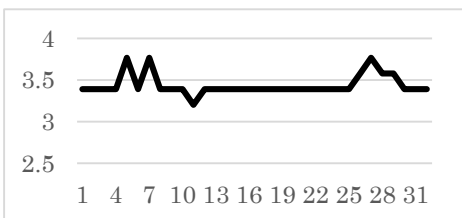
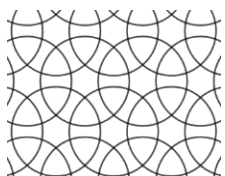
$R(1.03)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(1.03) = 4.435$

図 1 6 ルーロー模様 $R(1.03)$ と交点密度のグラフ



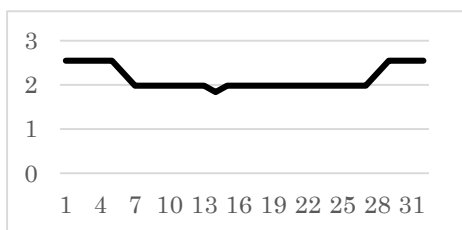
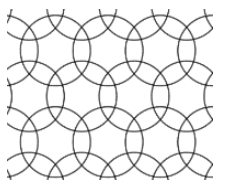
$R(1.23)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(1.23) = 0.705$

図 1 7 ルーロー模様 $R(1.23)$ と交点密度のグラフ



$R(1.32)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(1.32) = 0.6477$

図 1 8 ルーロー模様 $R(1.32)$ と交点密度のグラフ



$R(1.52)$ の交点密度
エネルギー
 $E_{pt}(1.5) = 0.344$

図 1 9 ルーロー模様 $R(1.52)$ と交点密度のグラフ

7. $R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式

$R(d)$ の d と交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ との関係式を求めるために、 $d - E_{pt}(d)$ のデータを整理し、そのグラフを考察することにした。このとき、前節でも述べたように、例えば、 $d = 1$ の場合、6重点だけの模様となっているが（図6）、 $E_{pt}(d)$ は2重点の個数を1としてカウントするので、6重点の場合は5としてカウントし、 $E_{pt}(1) = 8.724$ を得た。これを基準に考えた交点密度エネルギーを**相対交点密度エネルギー**と呼び、

$$E_{pt}(d)_{1.0}$$

と表すことにした。 $E_{pt}(d)_{1.0}$ はFFTのデータ数に依存しないものとして考えた量である。

一方、得られたデータの $d - E_{pt}(d)$ のグラフは指数関数のグラフのように見えた（図20）。そこで、 $d - \log(E_{pt}(d)_{1.0})$ の回帰直線を求めた（図21）。

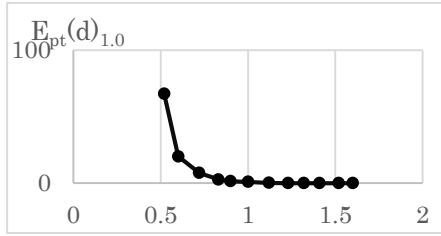


図20 $d - E_{pt}(d)$ のグラフ

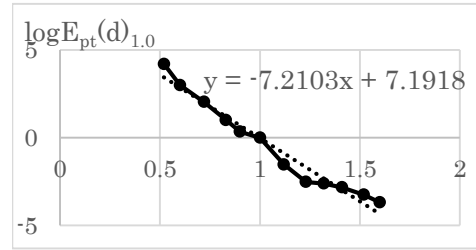


図21 $d - \log(E_{pt}(d))$ のグラフ

その結果、 $\log(E_{pt}(d)_{1.0}) = -7.2103d + 7.1918$ であり、相関係数 r は、 $r = -0.982$ で強い相関が得られた。しかし、 $0 < d < 2$ であり、 $\lim_{d \rightarrow 0} \log(E_{pt}(d)_{1.0}) = +\infty$ 、 $\lim_{d \rightarrow 2} \log(E_{pt}(d)_{1.0}) = -\infty$ であることを考慮する必要がある。そこで、 $d = 1$ のとき $\log(E_{pt}(d)_{1.0}) = 0$ であることも考慮して、

$$f(d) = \frac{6.3(d-1)}{d(d-2)}$$

という $\log(E_{pt}(d)_{1.0})$ の近似関数を考えた。まだまだ不十分ではあるが、今回はこれを使い、相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ との関係式を、 $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ と書いて、

$$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}} = e^{f(d)}$$

として、相対交点密度エネルギーを表す仮の尺度とした。表3はいくつかの d に対する $E_{pt}(d)$ 、 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 、 $\log(E_{pt}(d)_{1.0})$ 、 $f(d)$ 、 $E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$ の数値データである。以下の予想が得られた。

予想 ルーロー模様 $R(d)$ について、 d に関する相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)$ は、ある単調減少な指数関数で表される。ただし、 $\lim_{d \rightarrow 0} E_{pt}(d)_{1.0} = +\infty$ 、 $\lim_{d \rightarrow 2} E_{pt}(d)_{1.0} = 0$ を満たす。

表 3 $d, E_{pt}(d)$ のデータ

d	0.52	0.60	0.72	0.83	0.90	1.00
$E_{pt}(d)$	586.508	175.850	67.402	24.118	12.396	8.724
$E_{pt}(d)_{1.0}$	67.229	20.157	7.726	2.765	1.421	1
$\log(E_{pt}(d)_{1.0})$	4.208	3.004	2.045	1.017	0.351	0
$f(d)$	4.645	3.173	1.692	0.815	0.416	0
$E_{pt}(d)_{\text{仮}}$	50.872	20.086	6.781	3.013	1.890	1

d	1.12	1.23	1.32	1.41	1.52	1.60
$E_{pt}(d)$	1.913	0.705	0.647	0.519	0.344	0.217
$E_{pt}(d)_{1.0}$	0.219	0.081	0.074	0.059	0.039	0.025
$\log(E_{pt}(d)_{1.0})$	-1.519	-2.513	-2.604	-2.830	-3.244	-3.689
$f(d)$	-0.321	-0.490	-0.560	-0.583	-0.558	-0.510
$E_{pt}(d)_{\text{仮}}$	0.464	0.217	0.106	0.045	0.011	0.003

8. ルーロー模様 $R(d)$ の交点モーメント支配因子

ルーロー模様 $R(d)$ をじっと見ていると、少し模様が振動するような錯覚を受ける。これについても模様が作る幾何学的な量が影響しているように思えた。

私はこれについて、見る視点を中心とした交点のモーメントに関係するのではないかと考えた。すなわち、見る視点を中心として単位円を考え、その単位円内にある交点を中心軸（ y 軸）より左側に多いときは左側が重く

感じ、右側に多いときは右側が重く感じる。私たちは模様を見るときに、模様のパターンのある方向へ視線をずらしながら見ていく、同時に左右のモーメントの変化を感じ取っていると考えた。そこで今回の研究では、上下に対称である軸を x 軸にとり、 x 軸上で視点を平行移動したとして、平行移動する半径1の円領域内の交点の（視点の縦軸となる） y 軸に関するモーメントの総和のデータを取り、得られたデータをエクセルでFFT解析を行うことにした。

今回は、データ数 $2^6 = 64$ でのFFT解析を行ない、振動という錯覚に影響している $R(d)$ の幾何学的な量として以下を定義した。

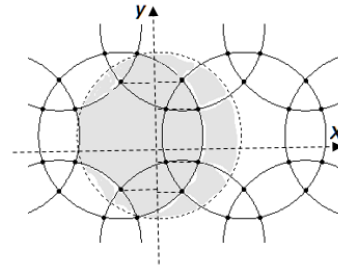


図 2 2 交点モーメント

交点モーメント支配因子の定義

平行移動しているデータ取得領域である単位円において、その y 軸に関する交点のモーメントの総和をデータとしてとり、それらの FFT 解析から得られる振幅スペクトル $C_\omega (0 \leq \omega \leq 32)$ を値の大きい順に並べる．このとき、最大な C_ω の周波数 ω_1 と、2 番目に大きい C_ω の周波数 ω_2 と、振幅比 $C_\omega(1:2) = C_{\omega_2}/C_{\omega_1}$ の 3 つの量を $R(d)$ の交点モーメント支配因子とよび、 $(\omega_1, \omega_2 | C_{\omega_2/1})$ と表す．

(例 1) $R(0.65)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (2, 1 | 0.73)$ である．

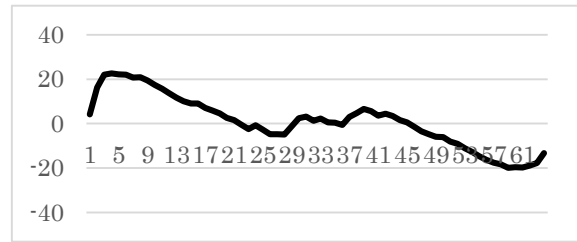
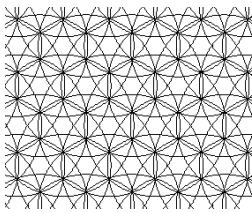


図 2 3 ルーロー模様 $R(0.65)$ と交点のモーメントのグラフ

(例 2) $R(0.81)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (4, 5 | 0.80)$ である．

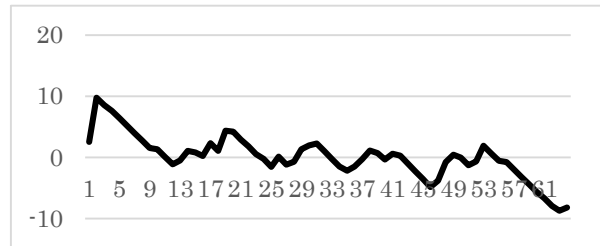
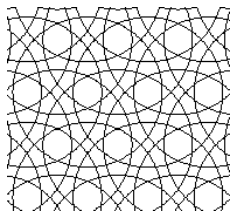


図 2 4 ルーロー模様 $R(0.81)$ と交点のモーメントのグラフ

(例 3) $R(1)$ の交点モーメント支配因子は $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2)) = (1, 2 | 0.49)$ である．

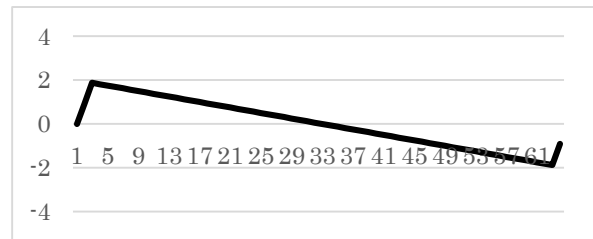
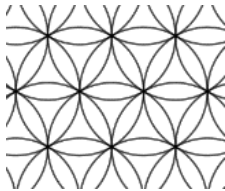


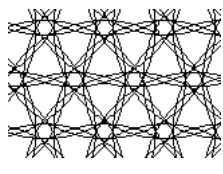
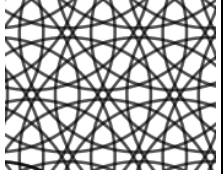
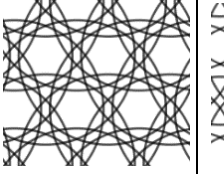
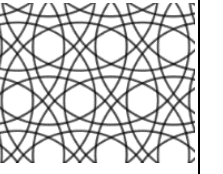
図 2 5 ルーロー模様 $R(1)$ と交点のモーメントのグラフ

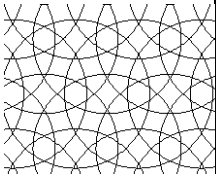
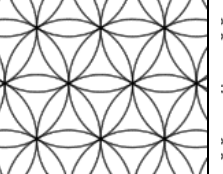
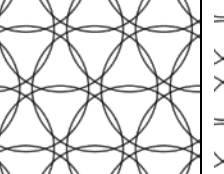
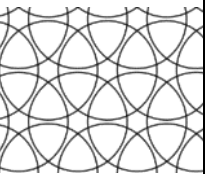
例 1 と例 2 は、どちらも交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の周波数 ω_1, ω_2 の振幅が同じくらいあるものである． $R(1)$ の場合は $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$ であるが、振幅比が 0.49 で $\omega_1 = 1$ の影響が強いものである．

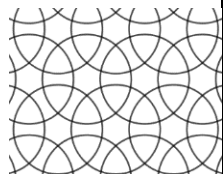
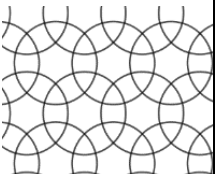
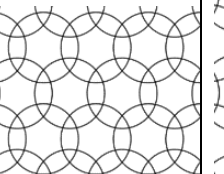
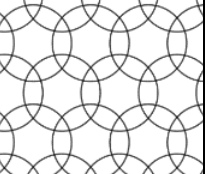
9. 交点モーメント支配因子に関する結果

表4は交点モーメント研究結果の一部で, $0.5 \leq d \leq 1.6$ の $E_{pt}(d)_{\text{仮}}$ と $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ の主なデータである.

表4 主な $R(d)$ の $E_{pt}(d)_{\text{仮}}$ と $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$

d	0.54	0.6	0.7	0.8
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	39.5	20.0	7.98	3.72
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(1,3 0.28)	(1,3 0.96)	(1,4 0.20)	(1,4 0.85)
模様 $R(d)$				

d	0.85	1.0	1.1	1.2
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	2.63	1	0.53	0.27
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(3,2 0.67)	(1,2 0.49)	(1,0 0.18)	(1,3 0.39)
模様 $R(d)$				

d	1.3	1.4	1.5	1.6
$E_{pt}(d)_{1.0 \text{ 仮}}$	0.13	0.049	0.015	0.003
$(\omega_1, \omega_2 C_\omega(1:2))$	(2,4 0.82)	(2,3 0.93)	(4,2 0.86)	(1,2 0.52)
模様 $R(d)$				

10. 本研究で得られた成果

今回, ルーロー模様の特徴を数値的に表す研究にチャレンジした. しかし, 前節の表4をまとめるまでには, 交点密度エネルギーといった尺度や交点モーメント支配因子といった尺度を, FFT のためのデータ数に依存しないことを注意しつつ, 何度も何度も定義し直し, 尺度を決めてはデータを検討することを繰り返した. そして, 本論文で述べた交点密度エネ

ルギー $E_{pt}(d)$ と交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ を定義することができた。

さて、表4からわかるように、 $d = 1.0$ と $d = 1.6$ の交点モーメント支配因子に表れる周波数はどちらも $\omega_1 = 1$ と $\omega_2 = 2$ で $C_\omega(1:2)$ も0.5付近で、さほど変わらない。しかし、 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮の値が $R(1)$ は1であり、 $R(1.6)$ は0.003と違いを表している。それは、 $R(0.54)$ と $R(1.2)$ の比較においても同様である。 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮の値は模様の濃さを表す尺度になっていると考えられる。

$R(0.54)$ と $R(0.6)$ については、 $\omega_1 = 1$ と $\omega_2 = 3$ で $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮の値も近いが、 $C_\omega(1:2)$ の値に明確に違いが出ている。 $R(0.6)$ での $C_\omega(1:2) = 0.9$ の意味は、主因子である周波数 $\omega_1 = 1$ と $\omega_2 = 3$ の振幅が同じくらいであることを意味し、そのため $\omega_2 = 3$ の影響が強くでている模様を意味していると考えられる。 $R(0.54)$ での $C_\omega(1:2) = 0.28$ は、周波数 $\omega_2 = 3$ の振幅が周波数 $\omega_1 = 1$ の振幅に比べかなり小さいことを意味するため、 $\omega_1 = 1$ の影響が強くでている模様を意味していると考えられる。

以上のことから、今回定義した交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ は模様の濃さを表す量として捉えられ、また、交点モーメント支配因子 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ は、模様の複雑さを表す量として捉えられていると考えている。 $(\omega_1, \omega_2 | C_\omega(1:2))$ については、 ω_1 と ω_2 の数値が1に近いほど模様は単純と判断され、 $C_\omega(1:2)$ の値は0に近いほど模様 $R(d)$ は周波数 ω_1 の影響を強く受けていると考えられる。 $C_\omega(1:2)$ の値が1に近いと周波数 ω_1 と ω_2 の振幅は等しいことを意味し、 ω_1 と ω_2 というどちらの周波数の影響も $R(d)$ は同等に受けていると考えられる。

1.1. 今後の研究の予定

今回、模様の相対交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ については、仮の交点密度エネルギー $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮を用いた。すなわち、 $E_{pt}(d)_{1.0}$ 仮 $= e^{f(d)}$ としたとき、 $f(d)$ を

$$f(d) = \frac{6.3(d-1)}{d(d-2)}$$

という式で近似した。しかし、まだまだ実際のデータと誤差が大きく、納得できるものではない、 $f(d)$ の正確な関数を求めたい。

謝辞

本論文に対して、日本数学教育学会高専・大学部会の先生方から貴重な多くのアドバイスをいただき、とても参考になりました。ここに感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 加田紘大, 正多角形から得られるルーロー図形の研究, 代数学ミニシンポジウム 2017in 倉敷 (報告集) pp.76-85,
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2017.pdf
- [2] 加田紘大, 2次曲線で作られる凹型ルーロー三角形の掛谷問題, 代数学ミニシンポジウム 2018in 倉敷 (報告集) pp.40-50,
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2018.pdf
- [3] 河野俊丈, 結晶群, 共立出版, 2015
- [4] 澤田彩花, 平面結晶群のセル解析と行列表現, 津山高専数学クラブ活動記録, 2017
http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/wallpaper_group_2017.pdf
- [5] 柴田洋一 他, 初歩から学ぶ基礎物理学 力学 I, 大日本図書, 2010