

PV number による
 n 次元フーレイ空間の結晶理論

赤松昌俊(情報工学科 4 年)

小林祐志(電気電子工学科 4 年)

[要約]

PV number による n 次元ファレイ空間の結晶理論

研究目的: ファレイ数列によって、単独ニューロンモデルの理論や実際の複雑な生命現象のモデル化へのアプローチがなされており、ファレイ数列の理論に大きな可能性を感じたため、ファレイ数列の高次元理論を構築することで、将来の科学の数理基礎の一つを提示できるのではないかと考えた。そのため、研究目的を「ファレイの既約分数理論の高次元化」とした。

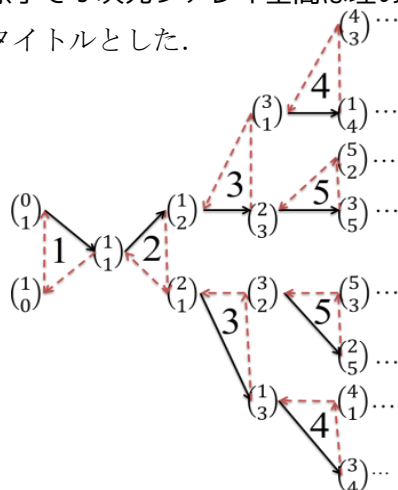
そのために、ファレイの既約分数理論のような n 次元ファレイ点の理論構築と、それをもとにファレイ点の数学的構造を幾何学的に研究することを行った。

研究方法: ファレイの既約分数理論とは 2 つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし、それらの分子同士、分母同士をそれぞれ足し算して次の既約分数をつくり、この操作をくり返して 0 と 1 の間のすべての既約分数を生み出すものである。より具体的には、ステップ 0 のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ とする。ステップ 1 のファレイ数列は $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ を加えた $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ である。ステップ 2 以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きさ順に並べ、隣り合った 2 つの分数から新しい分数を上の演算で作っていく。したがって、ステップ 2 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ で、ステップ 3 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$ というようになる。そして、この操作を無限に繰り返すことで全ての既約分数が生まれるのである。

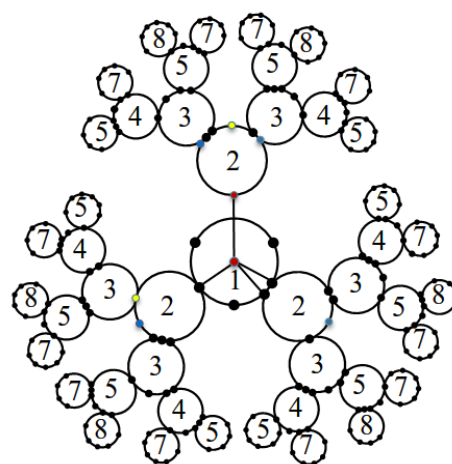
私達は、既約分数 $\frac{a}{b}$ ($a > 0, b > 0$) を、分数ではなく点 (a, b) と考えることで、その研究対象を n 個の自然数からなる既約点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に拡張した。この点を n 次元ファレイ点と呼び、 n 次元ファレイ点全体を n 次元ファレイ空間と呼んだ。そして、S.Kim と S.Ostlund の論文を読んでいく中で、ファレイ点が PV number に収束するというを知り、PV number の多項式を固有多項式にもつ行列によって、 n 次元ファレイ点を生み出せるのではないかと考えた。

研究結果: 2 次元ファレイ空間においては、 $(0,1)$ から全てのファレイ点を生み出す行列を発見することに成功した。それはより一般的な n 次元ファレイ点においても、有限個のファレイ点からすべてのファレイ点を生み出す行列理論への拡張に繋がった。

この発見の後、私達が行ったファレイ空間の構造研究における主たる研究結果は、2 次元では 3 つの点 $(0,1), (1,0), (1,1)$ から構成される基本ファレイ原子の存在の発見である。そして、その相似な原子で 2 次元ファレイ空間は埋め尽くされていたのである。3 次元では 7 つの点から構成される基本ファレイ原子が存在し、そしてその相似な原子で 3 次元ファレイ空間は埋め尽くされていた。私達にはそれがまるで結晶のように見えたため、それを研究タイトルとした。



2 次元ファレイ空間の結晶構造



3 次元ファレイ空間の結晶構造

1. はじめに

私達はファレイ数列の構成法と既約性に興味を持ち、ファレイ数列について調べていくなかで、“神経回路モデルのカオス” [1] という本に出会った。その本では、ファレイ数列を用いた単独ニューロンモデルの理論が書かれてあった。そして、実際の複雑な生命現象のモデル化へのファレイ数列によるアプローチはとても刺激的であった。私達はファレイ数列の理論の大きな可能性を感じたため、ファレイ数列の高次元理論を構築することで、将来の科学の数理基礎の一つを提示できるのではないかと考えた。以上のことから「ファレイの既約分数理論を高次元化する」これが私達の目標となった。

ファレイの既約分数理論とは 2 つの分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ を初期値とし、それらの分子同士、分母同士をそれぞれ足し算して次の既約分数をつくり、この操作をくり返して 0 と 1 の間のすべての既約分数を生み出すものである。より具体的には、ステップ 0 のファレイ数列を $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ とする。ステップ 1 のファレイ数列は $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ を加えた $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$ である。ステップ 2 以降のファレイ数列は直前に得られたファレイ数列を数直線上に大きき順に並べ、隣り合った 2 つの分数から新しい分数を上演算で作っていく。したがって、ステップ 2 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$ で、ステップ 3 のファレイ数列は $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$ というようになる。そして、この操作を無限に繰り返すことで全ての既約分数が生まれるのである。

私達は、既約分数 $\frac{a}{b}$ ($a > 0, b > 0$) を、分数ではなく点 (a, b) と考えることで、その研究対象を n 個の自然数からなる既約点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に拡張した。この点を n 次元ファレイ点と呼び、 n 次元ファレイ点全体を n 次元ファレイ空間と呼んだ (§ 2 参照)。そして、ファレイの既約分数理論のような n 次元ファレイ点の理論構築と、それをもとにファレイ点の数学的構造を幾何学的に研究することを目標とした。

今年度は、インターネットで見つけた S.Kim と S.Ostlund の論文[2]を読んでいく中で、ファレイ点が PV number に収束するということを知った。そして、その新しい観点からファレイ空間の研究をスタートさせた。その結果、2 次元ファレイ空間においては、 $(0,1)$ から全てのファレイ点を生み出す行列を発見することに成功した。それはより一般的な n 次元ファレイ点においても、有限個のファレイ点からすべてのファレイ点を生み出す行列理論への拡張に繋がった。

この発見の後、私達が行ったファレイ空間の構造研究における主たる研究結果は、2 次元では 3 つの点 $(0,1), (1,0), (1,1)$ から構成される基本ファレイ原子の存在の発見である。そしてその相似な原子で 2 次元ファレイ空間は埋め尽くされていたのである。3 次元では 7 つの点から構成される基本ファレイ原子が存在し、そしてその相似な原子で 3 次元ファレイ空間は埋め尽くされていた。私達にはそれがまるで結晶のように見えたため、それを研究タイトルとした。以下、これらの発見を中心にファレイ空間の結晶構造について詳しく論じていく。

2. n 次元ファレイ点の定義

まず、私達が研究対象とする n 次元ファレイ点と、 n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ を定義する.

定義 1. 点 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が n 次元ファレイ点とは、次の2つの条件を満たすものをいう.

① $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ ② $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_r) = 1$ (ただし, $r \leq n$ で, $a_j = 0$ であるものは含まない.)

定義 2. n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ とは、 n 次元ファレイ点全体のことをいう.

インターネットで論文を検索した結果、私達と同じように高次元ファレイ点を研究している論文が2つ見つかった. 1つは, S. Kim と S. Ostlund の論文[2]で, もう一つは A. Nogueira と B. Sevennec 論文[3]である. [3]は特殊線形群 $SL(n, \mathbb{Z}_+)$ の立場から高次元ファレイ数列を論じたものであるが, 詳細は3次元までの一部の議論で終わっているように見えた. [2]では, ある変換行列を使って高次元ファレイ空間の構造の研究が行われていた. そして, 彼らの定義した超黄金比により, ファレイ点列の収束が研究された. しかし, 各次元での超黄金比の定義の複雑さと幾何学条件の制約などにより, 5次元までの議論で終わっていた. しかし, 今回この研究で用いられた PV number が私達の研究の鍵となっている. 以下で詳しく論じることになるが, 私達は n 次元ファレイ空間を, フィボナッチ数列や, その類似な数列の並列空間と見て, その構造を研究することに取り組み, 高次元への拡張にある意味で成功したのである.

3. PV number によるファレイ生成行列

n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ の構造を研究する上で私達は PV number に関する多項式に着目した. PV number x とは, 正数 x を n 乗していくと, その x の n 乗に最も近い整数をとの距離が0になっていくもののことである.

具体的には, PV number を小さい順に並べると, それらは以下の多項式の正数解である.

$$\begin{aligned}x^2 - x - 1 &= 0 \\x^3 - x - 1 &= 0 \\x^4 - x^3 - 1 &= 0 \\x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1 &= 0 \\x^3 - x^2 - 1 &= 0 \\x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1 &= 0 \\&\vdots\end{aligned}$$

特に, この多項式の中の $x^2 - x - 1 = 0$ の解は, 黄金比である. この意味で PV number は黄金比の一般化(超黄金比)と考える見方もある.

4. 2次元ファレイ点の生成行列

2次元ファレイ点について論じる. 2次元における PV number の多項式は $x^2 - x - 1 = 0$ である.

この多項式を固有多項式としてもつ行列は, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる. そして, これを2次元ファレイ生成行列とする.

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2次元ファレイ生成行列

私達は、最小の PV number を解にもつ多項式から生み出された行列 U_2 をうまく利用すれば、全ての 2 次元ファレイ点を生み出す理論が得られるかもしれないと考えた。

定義 3. 変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値: $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、次の 2 つの操作のどちらかを行う。

$$\textcircled{1} f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto U_2 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto U_2 \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'_n| \\ |b'_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

(注意) $F^{-1}: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ は、次の操作 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto U_2^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a_1| \\ |b_1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ を意味する。

変換 F をすると、図 1 のようにファレイ点が生み出される。

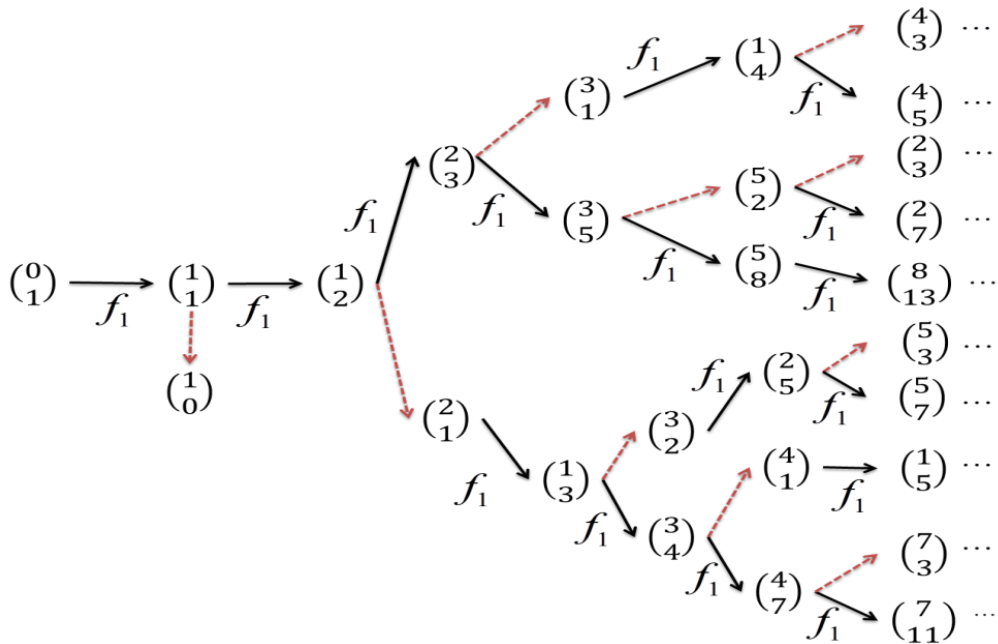


図 1 (変換 F から生み出される 2 次元ファレイ空間)

5. 変換 F から生み出される 2 次元ファレイ空間の構造

私達は、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からすべての 2 次元ファレイ点を生み出すことができるのではないかと予想した。

主結果 1. 2 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ の任意のファレイ点は、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生み出される。逆にいえば、任意のファレイ点は有限回の操作 F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換される。

(証明) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が F^{-1} で $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換されることを示す。

①ある k が存在し $a < b < ka$ とすると

$$F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}, F^{-1}\begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-2a \\ b-a \end{pmatrix}, F^{-1}\begin{pmatrix} b-2a \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-2a \end{pmatrix},$$

$$F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-3a \\ a \end{pmatrix}, \dots, F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b-(k-2)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-(k-1)a \\ a \end{pmatrix}.$$

$a' = b - (k-1)a$, $b' = a$ とおくと $a > a'$, $b > b'$ かつ $b' > a'$ が成り立つ。これは F^{-1} を繰り返すことで $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変換されることを示す。② $b \leq a$ を仮定すると、 $F^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}$ で $b-a < a$ であるので①に帰着する。既約性に関しては初等的な整数論を使えば証明できる。(証明終)

6. 2 次元のファレイ原子と結晶構造について

主結果 1 の変換の様子を詳細に研究した結果、ファレイ空間 $\mathfrak{F}_2$ は、操作 F によって右の図のような三角形に分割された構造を持つことがわかった。

右図における棒矢印は f_1 , 点線矢印は f_2 を表す。これに関して私達は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ というように 3 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が連結ループ構造をもつことを発見した。この 3 点連結ループ構造をファレイ原子と呼ぶ。そして、すべてのファレイ点においてファレイ原子が構成されていた。これが主結果 2 である。主結果 2 を定式化すると次のようになる。

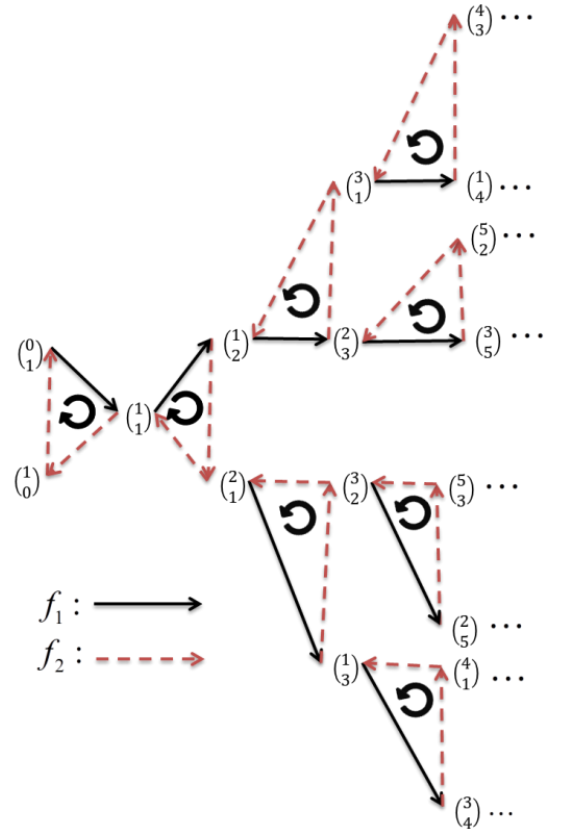


図 2 (2 次元ファレイ原子と結晶構造)

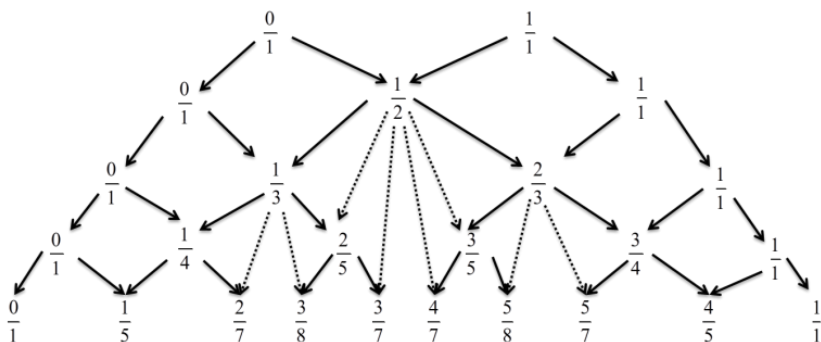


図 4 (ファレイツリー)

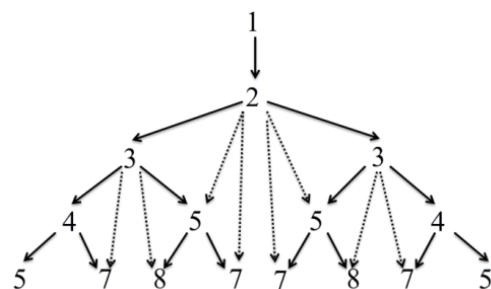


図 5 (インデックストリー)

8. 3次元ファレイ空間の結晶構造について

3次元での、PV number の多項式は $x^3 - x - 1 = 0$ である. この固有多項式を持つ行列は数多く存在していたが, その中から生成される 3次元ファレイ点の構造が 2次元と類似している行列を選択した. 3次元ファレイ生成行列は以下とする.

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3次元ファレイ生成行列

定義 5.

変換 $F: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$, 初期値 $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は, 次の 2つの操作のいずれかを行う.

① $f_1: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto U_3 \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

② $f_2: \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto U_3 \begin{pmatrix} -a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

任意の 3次元ファレイ点 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ から新たなファレイ点を生み出す場合の符号の組み合わせには,

$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$ の 8種類がある.

しかし, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a+b \end{pmatrix}$ となり, 符号の違いが関係してくるのは a と b だけである. 変換 F では

絶対値をとるため, $|a+b| = |-a-b|$, $|a-b| = |-a+b|$ となり, 符号の組み合わせは $\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \end{pmatrix}$ の 2種類のみでよいことがわかる.

さらに、私達は 2 次元のときと同様に、操作 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からすべての 3 次元ファレイ

点を生み出すことができるのではないかと予想した。そして、次の主結果を得た。

主結果 6.

3 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_3$ の任意のファレイ点は、変換 F を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生み出される。そして、任意のファレイ点は有限回の変換 F^{-1} で 7 点からなるファレイ原子のループに落ち込む。

(証明) 主結果 1 と同様の議論で示される。(証明終)

さて、3 次元においてもファレイ原子は存在するのだろうか。これが私達の次なるテーマとなった。コンピュータで調べた結果、すぐにわか

ったことは 7 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が F^{-1} で連結され、ル

ープ構造を形成していたことである。そして、私達は 2 次元における主結果 2 と同様なファレイ結晶構造があることを期待した。実際コンピュータでの計算結果はいつも肯定的であった。主結果 6 より、右の 7 点の連結ループ構造は、基本的であるため、これを基本ファレイ原子と呼ぶことにした。

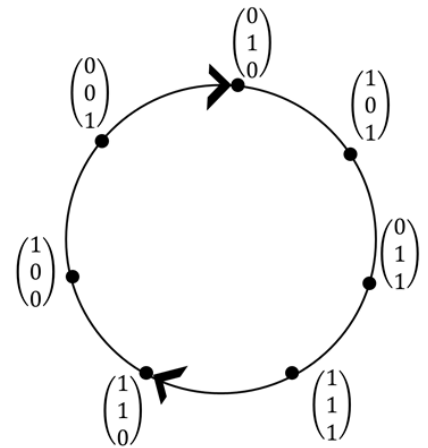


図 6 (7 点の基本ファレイ原子)

主結果 7(予想). $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を 3 次元ファレイ点とすると、それを含む連結なループ構造が存在し、それは最低

7 点で構成される。1 つのループには異なる 3 つのループが連結する。ただし、すべてのファレイ点がループ構造をもつわけではない。

図 7 におけるループ[1]は基本ファレイ原子である。以下にその他のループを構成しているファレイ点を書き出す。

ループ[2] $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ループ[3] $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ループ[4] $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

ループ[5] $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

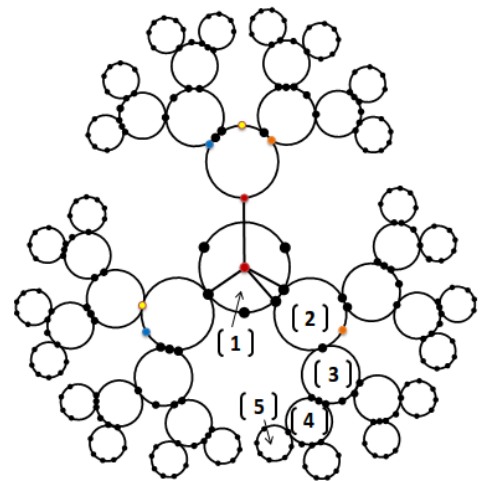


図 7 (3 次元ファレイ空間のループ構造)

そしてループ[1]の 7 つの構成点をベクトルと考えた時の 7 点の総和は $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ となる。ループ[2]における 7 点の総和は $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, ループ[3]は $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, ループ[4]は $\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$ になる。そこでこのループの総和を 4 で割ったものをそのループのインデックスとした。

また, 主結果 7 で述べたように, ループを持たない 3 次元ファレイ点が存在する。予想ではあるが, 図 8 のようにループとループをつなぐバイパスのような構造をしているのではないかと考えているが, 現在のところ研究中である。

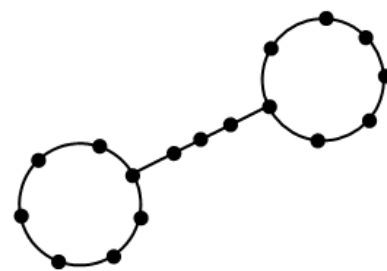


図 8 (バイパスのイメージ図)

3 次元においても, 2 次元と同様なインデックス構造をしているのか研究を進めた。

主結果 8. 3 次元でのインデックス構造は 2 次元と同様にファレイツリーと類似した構造をもつ。(図 4 と図 9 参照)

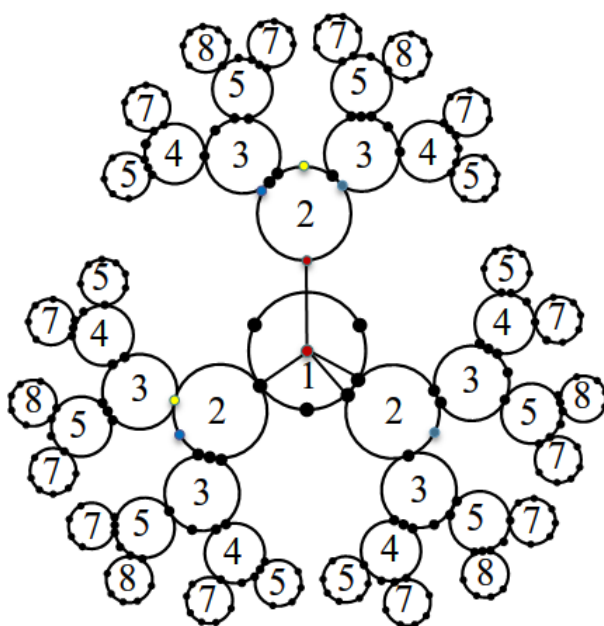


図 9 (3 次元ファレイ空間のインデックス構造)

ループ構造とバイパスをもつ 3 次元ファレイ結晶構造は, すべての 3 次元ファレイ点から構成されていると考える。そのことから, 以下のことを予想した。

予想.

3 次元ファレイ結晶構造は 3 次元ファレイ空間である。

9. 4次元以上のファレイ空間の結晶構造

ファレイ生成行列を決定するには、以下の条件を満たす必要がある。

- ① 任意のファレイ点から新たなファレイ点を生み出す。
- ② 任意のファレイ点に有限回の変換 F^{-1} をするとただ1つの基本ファレイ原子に落ち込む。
- ③ PV number を解にもつ多項式を固有多項式にもつ。
- ④ 生み出されたファレイ点の構造が2次元ファレイ点の構造と類似している。

4次元のファレイ生成行列はPV number の $x^4 - x^3 - 1 = 0$ を固有多項式に持ち、上の条件から次の行列と考えている。

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4次元ファレイ生成行列

4次元でも2次元、3次元と同様に4次元ファレイ生成行列から全てのファレイ点が生み出されるのではないかと考えた。

5次元では、PV number の $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$ を固有多項式に持ち、条件から次の行列を5次元ファレイ生成行列と考えている。

$$U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5次元ファレイ生成行列

6次元ファレイ生成行列となりうるPV number は $x^3 - x^2 - 1 = 0$, $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1 = 0$ のどちらか1つではないかと考えている。

n 次元ファレイ空間 $\mathfrak{F}_n$ の結晶構造の今後の研究課題

- ① 6次元以上のPV number によるファレイ生成行列を発見する。
- ② 固有多項式から生み出された行列の選択による結晶構造の違いを調査する。
- ③ ループをもつファレイ点とそうでないファレイ点の違いを調査する。

参考文献

- [1] 畑正義, 神経回路モデルのカオス, 朝倉書店,(1998),pp.50-52
- [2] Seung-hwan Kim, Stellan Ostlund, Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems, Physical Review A Volume 34, Number 4, 1986,pp.3426-3434
- [3] Arnaldo Nogueira , Bruno Sevennec, Multidimensional Farey partitions, Indagationes Mathematicae Volume17, 2006 ,pp.437-456
- [4]秋山茂樹,Pisot 数,数の不思議-科学を語るためのキーワード,数理科学 2008 年 8 月号 No.542,(2008)