三元整数環 M_3 に関する研究

矢部　佳史, 西井 潤，森中 大輔 (津山高専，電子制御工学科 3 年)

1　はじめに

数学クラブの先輩達の研究「虚数の整数の研究」[1]（末田，橘）では，複素整数にも，偶数と奇数（偶奇性）があるかという問題から，偶奇性が存在することを確かめ，それを応用して，複素整数版コラッツ問題や複素ピタゴラス数 [2]（橘）という研究が行われた．私達は，複素整数以外の数の世界で，これと同様な研究ができないかと考えた．

一方，一年生のとき虚数単位 i は $i^2 = -1$ となる数のことと習ったが，二年生で行列を学習し，その後，i について，数学クラブの仲間と議論した結果，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ は，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となることから，これは i と同じ役割をしていることがわかった．さらに，複素整数 $a + ib$ は $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ と書け，複素整数が行列から構成できることに興味を覚えた．そこで複素整数とは違う整数行列を別な観点から考えれば，新しい数の世界が得られ，その後，その世界における偶奇性，コラッツ問題 [3]，ピタゴラス数について研究できるのではないかと考えた．

最初は，a, b, c, d を整数とした行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の世界について考察を行っていたが，偶奇性についてすら結果は得られなかった．ましてや，コラッツ問題，ピタゴラス数は論外であった．その原因は計算の複雑さにあると考え，扱う行列を見直し，成分の一つを 0 にした $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ という数の世界で考えてみたところ，偶奇性に関して，少し手ごたえを感じた．

簡単に分かることであるが，$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 全体は，和，差，積という計算で閉じている数の集合で，このような集合を数学では環と呼ぶ．整数全体も環であり，複素整数全体も環である．しかし $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 全体は積については可換ではない．これが整数や複素整数とは大きく異なる点である．私達は，研究対象とする $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 全体を**三元整数** M_3 と名付け，この元を M_3 数と呼び，非可換環である M_3 数の研究に取り組んだ．以下に私達の研究結果の概要を説明する．

2　研究方法

まず，三元整数 M_3 に，偶数と奇数は存在するのかという問題に取り組んだ．得られた結論は「存在しない」であった．しかし，研究結果から偶数のような集合と，奇数のよう

な性質を持つ 3 タイプの集合の存在が見つかった．そこで，これらの 4 つの集合から得られる偶奇性に近い概念のことを半偶奇性と呼んで詳細に研究した．

次に，M_3 版のコラッツ問題を作るという研究を行った．整数におけるコラッツ問題とは，ある数に対して，偶数なら 2 で割って，奇数なら 3 倍して 1 をたすという操作を考えると，どんな数もこの操作を繰り返すことで最終的に 1 に変換される，という有名な未解決問題である．私達は M_3 数の半偶奇性を用いて，これについて取り組み，私達なりの M_3 版コラッツ問題を作ることにチャレンジした．

最後に，M_3 上のピタゴラス数を定義し，その構造の研究も行った．整数のピタゴラス数とは $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) のことであり，これらは二つのパラメータから得られることが知られている．M_3 上のピタゴラス数は

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}^2$$

となる M_3 数の組 $\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}\right\}$ と自然に定義できる．さらに (a_1, a_2, a_3) と (c_1, c_2, c_3) は，どちらも整数におけるピタゴラス数でなければならないことは簡単にわかる．残された問題は，(b_1, b_2, b_3) はどのような性質をもつ数なのかである．この問題に取り組んだ．

3　半偶奇性

整数において，整数 a が 2 の倍数であるときを偶数，それ以外を奇数と定義される．そして，足し算と掛け算に関しては，偶奇性を特徴付ける以下の性質がある．

（Ｉ）足し算に関する性質: (1) 偶数＋偶数＝偶数，　(2) 偶数＋奇数＝奇数＋偶数＝奇数，(3) 奇数＋奇数＝偶数

（ＩＩ）掛け算に関する性質: (1) 偶数×偶数＝偶数，　(2) 偶数×奇数＝奇数×偶数＝偶数，(3) 奇数×奇数＝奇数

M_3 の 4 つの部分集合 P, I_1, I_2, I_0 を以下のように定義する．

定義 1．m, n, b は整数とする．

$$P = \left\{\begin{pmatrix} 2m & b \\ 0 & 2n \end{pmatrix}\right\}, \quad I_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2m & b \\ 0 & 2n+1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$I_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2m+1 & b \\ 0 & 2n \end{pmatrix}\right\}, \quad I_0 = \left\{\begin{pmatrix} 2m+1 & b \\ 0 & 2n+1 \end{pmatrix}\right\}$$

主結果 1．P, I_1, I_2, I_0 に関する積の構造は半群であり，和に関する構造はクライン群である．□

表 1 （積）

$\times$	P	I_1	I_2	I_0
P	P	P	P	P
I_1	P	I_1	P	I_1
I_2	P	P	I_2	I_2
I_0	P	I_1	I_2	I_0

表 2 （和）

$+$	P	I_1	I_2	I_0
P	P	I_1	I_2	I_0
I_1	I_1	P	I_0	I_2
I_2	I_2	I_0	P	I_1
I_0	I_0	I_2	I_1	P

表 1 は縦軸が積の左，横軸が積の右を意味する．表 1 と表 2 より，P をその性質から**偶数**と呼ぶ．また，I_1, I_2, I_0 は奇数とは呼べないが奇数に近い性質を持っており，これらをまとめて**半奇数**と呼ぶ．そして，M_3 上の数は，必ず P, I_1, I_2, I_0 のいずれかの集合に属する．この性質を**半偶奇性**と呼ぶ．

4 三元整数 M_3 上でのコラッツ問題

三元整数 M_3 の元 A に対して，A が半奇数のときどういう操作を定義するかを考えたい．そのとき単位行列 E を使って，$AE + E$ なる操作を考えることは単純すぎる．自然数における操作 $3n + 1$ で使用する数 3 に対応する数として，$K = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる行列を考えた．なぜならば，対角成分が 1 以外の正の整数では，良い結果が得られなかったからである．さらに，自然数における操作 $3n + 1$ で使用する 1 を足す操作については，整数 a が奇数なら a を 2 で割った余りの 1 を加えていると理解して，A の成分を 2 で割った余りを加えるという操作 $+\mathrm{mod}(A, 2)$ を考えることにした．また，A が偶数のとき，すなわち，$A = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 0 & ac \end{pmatrix}$ のときは，$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考え，

$$P^{-1}\tilde{A} = P^{-1}\begin{pmatrix} 2a & b + \mathrm{mod}(b, 2) \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$$

という操作を考えることとした．以上をまとめると以下のようになる．

定義 2. （M_3 上の重み k のコラッツ操作） M_3 の元 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ において，A が半奇数ならば，操作 $KA + \mathrm{mod}(A, 2)$ の後に各成分の絶対値を考えることとし，偶数ならば，$P^{-1}\begin{pmatrix} 2a & b + \mathrm{mod}(b, 2) \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$ の後に各成分の絶対値を考えることとする．この操作を M_3 上の重み k のコラッツ操作という．ここで $K = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

以下の結果は数値計算から得られた予想である．

主結果２ (M_3 上の重み k のコラッツ問題).

(1) k が 2 以上の整数のとき，M_3 の元 A は，重み k のコラッツ操作により，最終的に $\begin{pmatrix} 2 & 2k-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をループする．

(2) k が -2 以下の整数で，$k \equiv 0 \bmod 3$ のとき，M_3 の元 A は，重み k のコラッツ操作により，最終的に $\begin{pmatrix} 1 & -k/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2k/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & (-k-3)/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & (-2k+3)/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ をループする．

(3) k が -2 以下の整数で，$k \equiv 1 \bmod 3$ のとき，M_3 の元 A は，重み k のコラッツ操作により，最終的に $\begin{pmatrix} 1 & (-k-1)/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & (-2k+1)/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ をループする．

(4) k が -2 以下の整数で，$k \equiv 2 \bmod 3$ のとき，M_3 の元 A は，重み k のコラッツ操作により，最終的に $\begin{pmatrix} 1 & (-k-2)/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & (-2k+2)/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ をループする．

5　三元整数 M_3 上のピタゴラス数

M_3 上のピタゴラス数を決定するために，条件 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+c^2 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$ となる行列を研究した．この条件を満たすものを，**ピタゴラス型行列**と呼んだ．そして，以下の結果を証明できた．

主結果３．　ピタゴラス型行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ に対してただひとつの既約な数の組 (s,t) が存在し，$a = t(s+t)$, $b = s^2+t^2$, $c = s(s+t)$ となる．□

主結果 3 から次の結果が自動的に得られる．

主結果４． M_3 数の組 $\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}\right\}$ が 3 つともピタゴラス型行列でかつ，(a_1,a_2,a_3) と (c_1,c_2,c_3) がピタゴラス数ならば，$\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}\right\}$ は M_3 上のピタゴラス数，すなわち

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}^2$$

が成り立つ．□

6　三元整数 M_3 におけるフェルマー型行列

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n + c^n \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ を満たす行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ を n 次フェルマー型行列と呼ぶ．次の結果を証明できた．

主結果５．n 次フェルマー型行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ に対して，ただひとつの既約な数の組 (s,t) が存在して，

$$\begin{aligned} a &= s(s^{n-1} + s^{n-2}t + s^{n-3}t^2 + \cdots + st^{n-2} + t^{n-1}) = \frac{s(s^n - t^n)}{(s-t)}, \\ b &= s^n + t^n, \\ c &= t(s^{n-1} + s^{n-2}t + s^{n-3}t^2 + \cdots + st^{n-2} + t^{n-1}) = \frac{t(s^n - t^n)}{(s-t)} \end{aligned}$$

となる．

（証明）$n = 3$ の場合の証明を紹介する．行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の三乗の $(1,2)$ 成分を比較して，

$$a^3 + c^3 = b(a^2 + c^2 + ac) \tag{1}$$

となる a,b,c について考えればよい．(1) の両辺を b^3 で割ると，

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{c^3}{b^3} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b}$$

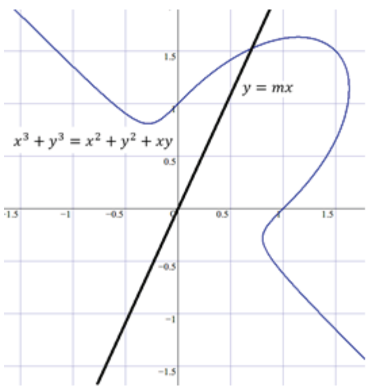
となる．$x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{b}$ とおくと

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2 + xy \tag{2}$$

を得る．この式の項をすべて左辺に移項すると，左辺は，

$$f = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 - xy$$

となる．曲線 $f = 0$ の原点でのテイラー展開を考えると原点の近傍では $-x^2 - y^2 - xy = 0$ で近似されるので，曲線 $f = 0$ は，原点が 2 重点となっていることを示している．したがって，曲線 $f = 0$ は，直線 $y = mx$ と原点で二回，それ以外の点で一回交わる．



よって，原点以外の点がパラメータで表示できる．後は，$y = mx$ を式 (2) に代入することで，$x = 0, y = 0$ の以外の解は

$$x = \frac{m^2 + m + 1}{m^3 + 1}, \qquad y = \frac{m^3 + m^2 + m}{m^3 + 1}$$

であることがわかる．この x, y に $m = \dfrac{s}{t}, x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{b}$ を代入すると，

$$x = \frac{a}{b} = \frac{\dfrac{s^2}{t^2} + \dfrac{s}{t} + 1}{\dfrac{s^3}{t^3} + 1} = \frac{t(s^2 + st + t^2)}{s^3 + t^3}, \quad y = \frac{c}{b} = \frac{\dfrac{s^3}{t^3} + \dfrac{s^2}{t^2} + \dfrac{s}{t}}{\dfrac{s^3}{t^3} + 1} = \frac{s(s^2 + st + t^2)}{s^3 + t^3}$$

となる。これより，

$$a = t(s^2 + st + t^2), \quad b = s^3 + t^3, \quad c = s(s^2 + st + t^2)$$

を得る.（証明終）

7　今後の研究計画

（１）M_3 版コラッツ問題について

主結果２で M_3 版コラッツ問題を作ることができたが，いくつかの数で収束の様子をみてみると，整数のコラッツ問題に比べて変化の幅が小さく，証明することの可能性が感じられる．さらに，今回の操作は幾分強引な面があり，より自然な問題に改良したい．

（２）M_3 上のピタゴラス数について

ピタゴラス型行列と整数のピタゴラス数から M_3 版ピタゴラス数が得られることがわかったが，現在，M_3 版ピタゴラス数の具体例からより詳細な研究を行っているところである．

（３）フェルマー型行列の応用について

この問題に関しては，整数の世界における $\sum_{i=1}^{k} x_i^k = y^k$ となる研究と平行して行わなければならないと考えている．

参考文献

[1] 末田卓巳, 橘智子, 虚数の整数の研究 —偶奇性を使った魅力的応用の創造 —, http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub.html

[2] 橘智子, 複素ピタゴラス数の構造について, 津山代数幾何シンポジウム 2012 報告集, pp202-211(2013 年 2 月), http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algegeo_index.html

[3] リチャード・ガイ，一松信：数論における未解決問題集，シェプリンガー・フェアラーク東京，(1983)

[4] 足立恒雄，フェルマーの大定理が解けた！，講談社 BLUE BACKS，(1995)

[5] 二間瀬敏史，図解雑学素粒子，ナツメ社，(2000)