継続研究

研究レポート（研究論文）

素数pを基礎にした完全数の研究

津山工業高等専門学校電気電子工学科３年
桐山翔伍

1. はじめに

昨年の JSEC2016 において「メルセンヌ素数とその派生数に関する研究」[K1]を発表した．この研究において，私はこれまでに知られている完全数をより一般的に扱った**「素数pを基礎にした完全数」という数を定義することに成功した**.

完全数aとは$\tau(a)$をaを除いた約数の和としたとき，$a=\tau(a)$となる数のことである．私は昨年の研究において，**通常の6, 28, 496, 8128,⋯ といった完全数は,「素数 2 を基礎にした完全数」ではないかと考えた**．なぜならこれらは全て，2 のべき乗の和（$1+2+\cdots+2^n$）から得られるメルセンヌ素数に関係しているからである．例えば，完全数 6 は$6=2\times3$であり，これは$3\ (=1+2)$というメルセンヌ素数に関係し，完全数 28 は$2^2\times7$であり，これは$7\ (=1+2+2^2)$というメルセンヌ素数と関係している．そしてこれ以降の完全数も調べてみた限り，全て$2^n\times$**(メルセンヌ素数) という形**になっていたのである．

メルセンヌ素数が 2 のべき乗の和から得られるのであれば, 3 のべき乗の和（$1+3+\cdots+3^n$）から得られるメルセンヌ素数，5 のべき乗の和（$1+5+\cdots+5^n$）から得られるメルセンヌ素数，より一般に素数pのべき乗の和（$1+p+\cdots+p^n$）から得られるメルセンヌ素数というものを考えれば，これに関係した**素数pを基礎にした完全数という数があるのではないだろうか**と思い，研究を行ったのである．詳細は次節にて述べるが，昨年の研究において素数pを基礎にした完全数を定義することに成功した．そして今年は，この素数pを基礎にした完全数の特徴をつきとめることにチャレンジした．

2. 昨年の研究

昨年行った研究の中から，今年行った研究に関連する部分を簡単に説明する．

まず素数 2 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 ${}^2M_n$，すなわち，

$${}^2M_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

となる**素数** ${}^2M_n$を考える．そして，

$$a=2^{n-1}\times\ {}^2M_n$$

と置く．このとき，**$\tau(a)$をa以外の約数の和**とすると

$$a=\tau(a)$$

が成り立つ．すなわち，このようにして得られた数aは全て完全数であることが分かった．

そこで，素数 3 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 ${}^3M_n$を定義してみた．すなわち

$${}^3M_n=1+3+3^2+\cdots 3^{n-1}$$

という**素数** ${}^3M_n$である．そして，

$$a=3^{n-1}\times\ {}^3M_n$$

なる数を研究したところ,

$$a=2\tau(a)-\ {}^3M_n$$

という法則が成り立つことに気がついた．さらに素数 5 のべき乗の和から得られるメルセンヌ素数 ${}^{5}M_n$を，

$$ {}^{5}M_n = 1 + 5 + \cdots + 5^{n-1} $$

という**素数** ${}^{5}M_n$とし，

$$ a = 5^{n-1} \times {}^{5}M_n $$

を研究してみた．その結果,

$$ a = 4\tau(a) - 3 \times {}^{5}M_n $$

という法則を発見した．

そこで一般に，素数pのべき乗の和から得られるメルセンヌ素数

$$ {}^{p}M_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} $$

を定義し，${}^{P}M_n$をp**メルセンヌ素数**と呼ぶことにした．そして

$$ a = p^{n-1} \times {}^{P}M_n \tag{1} $$

なる数を研究したところ

$$ a = (p-1)\tau(a) - (p-2)\,{}^{P}M_n \tag{2} $$

が成り立つことを突きとめ，これを証明した．このaは${}^{P}M_n$とp^{n-1}の積から得られるため，${}^{P}M_n$**派生数**と呼ぶことにした．

私は，等式(2)が成り立つ数は，${}^{P}M_n$派生数以外にもあるのではないかと思った．そこで，以下を定義し研究を進めた．

定義（ ${}^{p}M_n$完全数 ）
pを素数，${}^{p}M_n$をpメルセンヌ素数とする．このときaが${}^{p}M_n$**完全数**であるとは，aが

$$ a = (p-1)\tau(a) - (p-2)\,{}^{p}M_n $$

を満たすときをいう．

（**注意 1**）$p \geq 3$のとき，${}^{p}M_n$完全数は奇数である．

3. 今回の研究方針

これまで扱われていた完全数については，歴史的な結果がある．それは，紀元前にユークリッドが予想し，18 世紀にオイラーが証明した次の定理である．

定理　（ユークリッド・オイラー）
$M_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$とし，$a = 2^{n-1}M_n$を考える．このとき$M_n$が素数ならば，$a$は完全数である．逆に，偶数（2 の倍数）の完全数はこのような形に限る．

今回の研究においては，上の定理(ユークリッド・オイラー)を，${}^{p}M_n$完全数について書きかえることを目標にした.

4. $p=3,5,7$の場合の ${}^{p}M_n$完全数の研究

本研究の目標は，定理(ユークリッド・オイラー)を，${}^{p}M_n$完全数に書き換えることである.そのために$p=3,5,7$の場合の，特に ${}^{p}M_n$派生数以外の ${}^{p}M_n$完全数を，フリーソフト wxMaxima を使い，10^6までの範囲でコンピュータを用いて調査した.

$p=3$の場合，${}^{3}M_n$完全数については，${}^{3}M_3=13$ のとき ${}^{p}M_n$派生数以外の ${}^{p}M_n$完全数として 1809 と 18549 が見つかった．これらの数を分析すると，

$$1809=3^3\times 67,\quad 18549=3^4\times 229$$

となっており，1809は素数67に，18549は素数229を因数として持つことが分かった．$p=5,7$については，${}^{p}M_n$派生数以外の素数pに関する ${}^{p}M_n$完全数は見つからなかった．そこで，本研究の目標としている定理(ユークリッド・オイラー)を見直すと，${}^{p}M_n$完全数 aをpの倍数である$a=p^{d-1}Q$という形のものに限り調査すればよいのではないかと考えた.

しかし，${}^{p}M_n$完全数aの定義から，$p\geq 3$のときaは奇数であるが，だからといって，aをpの倍数だけに限定することはできない.そこで，もう少し一般にして$a={p_1}^{d-1}Q$(ただしp_1,Qは素数)という形で考えた方が適切であると判断した．そして，$p=3,5,7$のときの ${}^{p}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$のデータを$1\leq d\leq 20$の範囲で調査した.

① $p=3$の場合：${}^{3}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$ のデータ （${}^{3}M_n=\frac{3^n-1}{2}$，$2\leq n\leq 7$）

n	${}^{3}M_n$	d	p_1	Q	完全数a
3	13	3	3	13	$3^2\times 13$
		4	3	67	$3^3\times 67$
		5	3	229	$3^4\times 229$
		8	3	6547	$3^7\times 6547$
		17	3	129140149	$3^{16}\times 129140149$
		19	3	1162261453	$3^{18}\times 1162261453$
7	1093	7	3	1093	$3^6\times 1093$
		11	3	176053	$3^{10}\times 176053$
		17	3	129139069	$3^{16}\times 129139069$

② $p=5$の場合： ${}^{5}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$ のデータ　（${}^{5}M_n=\frac{5^n-1}{4}$，$2\leq n\leq 7$）

n	${}^{5}M_n$	d	p_1	Q	完全数a
3	31	3	5	31	$5^2\times 31$
		7	5	78031	$5^6\times 78031$
7	19531	3	3	8363	$3^2\times 8363$
		7	5	19531	$5^6\times 19531$

③ $p=7$の場合： ${}^{7}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$ のデータ　（${}^{7}M_n=\frac{7^n-1}{6}$，$2\leq n\leq 7$）

n	${}^{7}M_n$	d	p_1	Q	完全数a
5	2801	5	7	2801	$7^4\times 2801$
		6	7	103643	$7^5\times 103643$

5.　データの考察

pメルセンヌ素数${}^{p}M_n$とは

$${}^{p}M_n=1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}$$

であった．これをp進表示で考えると，1がn個並んだ数

$${}^{p}M_n=11\cdots1$$

を意味する．この観点から${}^{p}M_n$完全数aを考察してみようと考えた．そして，前節で得られた${}^{p}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$（ただしp_1,Qは素数）の表を見て，**素数Qをp進表示してみた**．以下がその結果である．

① $p=3$の場合： ${}^{3}M_n$完全数$a={p_1}^{d-1}Q$の素因数Qの 3 進表示のデータ

n	${}^{3}M_n$	d	p_1	Q	Qの 3 進表示
3	13	3	3	13	111
		4	3	67	2111
		5	3	229	22111
		8	3	6547	22222111
		17	3	129140149	22222222222222111
		19	3	1162261453	2222222222222222111
7	1093	7	3	1093	1111111
		11	3	176053	22221111111
		17	3	129139069	22222222221111111

② $p=5$の場合：${}^{5}M_n$完全数$a=p_1^{d-1}Q$の素因数Qの 5 進表示のデータ

n	${}^{5}M_n$	d	p_1	Q	Qの 5 進表示
3	31	3	5	31	111
		7	5	78031	4444111
7	19531	3	3	8363	231423
		7	5	19531	1111111

③ $p=7$の場合：${}^{7}M_n$完全数$a=p_1^{d-1}Q$の素因数Qの 7 進表示のデータ

n	${}^{7}M_n$	d	p_1	Q	Qの 7 進表示
5	2801	5	7	2801	11111
		6	7	103643	611111

p進表示されたQには，次のような特徴がある．

（1） ${}^{5}M_n$完全数における$a=3^2\times 8363$以外は，$p_1=p$である．

（2）$p_1=p$の場合，Qをp進表示で考えると，Qはd桁の数であり，1と$p-1$という数だけで構成されている．そして，下n桁まで 1 が並び，$n+1$桁からd桁まで$p-1$が並ぶ．

6. 主結果

${}^{p}M_n$完全数$a=p_1^{d-1}Q$(ただしp_1,Qは素数)においては，$p_1=p$の場合に重要なデータが得られた．すなわち，$a=p^{d-1}Q$のときの素数Qのp進表示に特徴が現れた．この特徴を 10 進表示で考えると，

$$Q={}^{p}M_n+p^n(p-1)\,{}^{p}M_{d-n}\qquad (\text{ただし，}d\ge n)$$

となる．これを元に次を定義した．

定義（擬pメルセンヌ数）

d,n を自然数$d\ge n$とする．このとき${}^{p}K_{d,n}$を

$${}^{p}K_{d,n}={}^{p}M_n+p^n(p-1)\,{}^{p}M_{d-n}$$

とし，これを**擬pメルセンヌ数**と呼ぶ．

特に，${}^{p}K_{d,n}$が素数のとき，${}^{p}K_{d,n}$を**擬pメルセンヌ素数**という．

(注意 2) 擬pメルセンヌ数の定義により，${}^{p}K_{d,n}$はその形からp進表示すると，n桁までが 1 が並び$n+1$桁からd桁までが$p-1$という数が並ぶことが分かる．

(注意 3) ${}^{p}K_{d,n}=(p-1)\,{}^{p}M_d-(p-2)\,{}^{p}M_n$でもある．

(注意 4) $p=2$のとき，注意 2 より${}^{2}K_{d,n}={}^{2}M_d$である．すなわち，擬pメルセンヌ数はメル

センヌ数である．

以上の準備のもとで，以下に今回の研究で得られた定理を述べる．

定理 1　${}^{p}M_n$をpメルセンヌ素数，${}^{p}K_{d,n}$を擬pメルセンヌ素数とし，$a = p^{d-1}\,{}^{p}K_{d,n}$とおく．このとき，$a$は${}^{p}M_n$完全数である．

定理 1 の証明には，高本[Ta]の P. 13 にある次の命題 1 を使う必要があった．

命題 1.　$S(x)$をxの約数の和とする．もしaとbが互いに素なら，$S(ab) = S(a)S(b)$となる．

定理 1 の証明に命題 1 を使うため，${}^{p}M_n$完全数aの定義を$S(a)$で書きかえておく．${}^{p}M_n$完全数の定義より

$$a = (p-1)\tau(a) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

であり，$\tau(a) = S(a) - a$であるので

$$a = (p-1)(S(a) - a) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

である．よって，

$$pa = (p-1)S(a) - (p-2)\,{}^{p}M_n \tag{3}$$

を得る．

（**定理 1 の証明**）(3)が成り立つことを示す．p^{d-1}と${}^{p}K_{d,n}$は互いに素であるので命題 1 より

$$S(a) = S(p^{d-1})S\left({}^{p}K_{d,n}\right) = \frac{p^d - 1}{p-1}\left(1 + {}^{p}K_{d,n}\right)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}(p-1)S(a) &= (p^d - 1)\left(1 + {}^{p}K_{d,n}\right) = p^d - 1 + pa - {}^{p}K_{d,n} \\ &= (p-1)\,{}^{p}M_d + pa - {}^{p}K_{d,n}\end{aligned}$$

である．${}^{p}K_{d,n} = (p-1)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n$（注意 3）より，

$$pa = (p-1)S(a) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

となり，aは${}^{p}M_n$完全数である．（証明終）

7.　定理 1 の逆に関する考察

定理(ユークリッド・オイラー)に対応する定理 1 の逆が成り立つかを解決することが，重要な課題となった．

問題 1.　pの倍数である${}^{p}M_n$完全数は$a = p^{d-1}\,{}^{p}K_{n,d}$に限るか.

以下，問題 1 について考察する.

bはpを因数に持たない自然数とし$a = p^{d-1}b$ とおく．さらに，aは${}^{p}M_n$完全数とする．このとき(3)より，

$$p^d b = (p-1)S(p^{d-1})S(b) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

が成り立つ．$S(p^{d-1}) = \frac{p^d - 1}{p-1}$より，

$$S(b) = \frac{p^d b + (p-2)\,{}^{p}M_n}{p^d - 1} = b + \frac{b + (p-2)\,{}^{p}M_n}{p^d - 1}$$

である．$\tau(b)$はbを除く約数の和であるから，

$$\tau(b) = \frac{b + (p-2)\,{}^{p}M_n}{p^d - 1} = \frac{b + (p-2)\,{}^{p}M_n}{(p-1)\,{}^{p}M_d}$$

であることが分かる．よって，

$$b = (p-1)\tau(b)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n \tag{4}$$

を得る．特に，bが素数のとき，$\tau(b) = 1$であるので，

$$b = (p-1)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n = {}^{p}K_{d,n}$$

となる.

(4)から得られるbは${}^{p}M_n$完全数aの定義によく似ており，得られた結果を命題としておく.

命題 2. bはpを因数に持たない自然数とし，$a = p^{d-1}b$ とする．このとき，aが${}^{p}M_n$完全数であるならば,

$$b = (p-1)\tau(b)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

が成り立つ.

問題 1 が正しいとするならば，bが素数であることを示せばよい．そのためには，bが合成数であると仮定して矛盾をだせばよい.

命題 3. bはpを因数に持たない合成数とし，$a = p^{d-1}b$ とする．さらに，aは${}^{p}M_n$完全数であるとする．このとき，もし$d \geq n$ならば，bの任意の素因数qは

$$(p-1)\,{}^{p}M_d < q$$

を満たす.

(証明)　aは${}^{p}M_n$完全数であるので，bは命題 2 の等式を満たす．その等式において$b = qb'$とすると，

$$qb' = (p-1)\tau(b)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n \tag{5}$$

となる．(5)は$\tau(b) = 1 + q + b' + C$と置くと，

$$qb' = (p-1)(q + b' + C)\,{}^{p}M_d - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

となる．${}^{p}K_{d,n} = (p-1)M_d - (p-2)M_n$より，

$$qb' = {}^{p}K_{d,n} + (p-1)(q + b' + C)\,{}^{p}M_d \tag{6}$$

である．$d \geq n$ より ${}^{p}K_{d,n} > 0$であり，さらに(6)より

$$\bigl(q - (p-1)\,{}^{p}M_d\bigr)b' = {}^{p}K_{d,n} + (p-1)(q + C)\,{}^{p}M_d > 0$$

となる．したがって，$(p-1)\,{}^{p}M_d < q$ である．(証明終)

命題 3 を使って，特に$n = d$ の場合において，問題 1 を解決することができた．

定理 2． $p \geq 3$ のとき $a = p^{n-1}b$が ${}^{p}M_n$完全数ならば，$b = {}^{p}M_n$である．つまり，$n = d$の場合においては，問題 1 は正しい．

(証明) bはpを因数に持たない合成数とし，$a = p^{d-1}b$ とする．そして，$a = p^{d-1}b$は ${}^{p}M_n$完全数であると仮定し矛盾を導く．$n = d$より ${}^{p}M_d = {}^{p}M_n$で，これは素数である．そしてbは命題 2 の等式を満たす．すなわち

$$b = \{(p-1)\tau(b) - (p-2)\}\,{}^{p}M_d$$

である．よって，${}^{p}M_d$はbの素因数である．したがって，命題 3 において$q = {}^{p}M_d$としてもよい．しかし$(p-1)\,{}^{p}M_d < {}^{p}M_d$となり矛盾する．(証明終)

定理 2 が証明できたので，問題 1 は，『$p \geq 3$，$n \neq d$で，bは素数でない』場合に，$a = p^{d-1}b$が ${}^{p}M_n$完全数でないことを示す場合が残された．しかし，この場合を示すことはとても難しく，今のところ私はその証明を示すことができない．

8. pの倍数でない ${}^{p}M_n$完全数

これまで，pの倍数である ${}^{p}M_n$完全数について説明してきたが，pの倍数でない ${}^{p}M_n$完全数について触れておく．これまでの調査により，私は以下の 4 つのpの倍数でない ${}^{p}M_n$完全数を見つけている．

(1) ${}^{5}M_7$完全数：$a = 3^2 \times 8363$，ここで ${}^{5}M_7 = 19531$である．

(2) ${}^{31}M_{17}$ 完全数：$a = 13 \times 1282261542060234416042729$，ここで ${}^{31}M_{17} = 568972471024107865287021434301977158534824481$である．

(3) ${}^{127}M_5$完全数：$a = 107 \times 1725060343$，ここで${}^{127}M_5 = 262209281$である．

(4) ${}^{193}M_5$完全数：$a = 191 \times 266390432827$，ここで${}^{193}M_5 = 1394714501$である．

これらの ${}^{p}M_n$完全数はどれも$a = q^j \times r$でq, rは素数で$q < p$となっている．さらに，その

特徴を調べるために，素数rはp進表示でどのような数になるのかを考えてみた．その結果，(1)において$r=8363$は5進表示で6桁，(2)において$r=12822615420602344160427 29$は31進表示で 17 桁，(3)において$r=1725060343$は127進表示で5桁，(4)において$r=266390432827$は193進表示で5桁であることがわかった．(2)から(4)についてrのp進表示での桁数は${}^{p}M_n$完全数におけるnと一致する．しかし，(1)においては一致しない．そこで，(1)を${}^{5}M_7$完全数：$a=3\times(3\times 8363)$と考え，3×8363の5進表示での桁数を求めると7桁となった．

pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数について，現在，私は以下の問題をたてている．

> **問題 2．** qをpとは異なる素数とし，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数aを$a=qb$と置く．このとき$q<p$であり，bをp進表示で考えたときbの桁数はnであることは，正しいか．

9. おわりに

昨年の JSEC2016 の後，それまでの研究を論文[K2]にまとめた．そしてまとめた論文を数学クラブの顧問の先生の勧めで日本教育学会会高専・大学部会論文誌に投稿し，掲載された．この論文[K2]を見て，学習院大学名誉教授の飯高茂先生が，雑誌「現代数学」に「高校生の定義した新しい完全数」というサブタイトルで，私の研究を紹介して評価してくださり(参考[K1]，[K2])，とてもうれしく，感謝した．今年は定理(ユークリッドオイラー)の${}^{p}M_n$完全数版を証明することに挑んだが，これまで述べたように，問題 1 は条件付きではあるが定理 2 という形で証明することまではできた．また，pの倍数でない${}^{p}M_n$完全数に関しても自らたてた問題 2 にとても関心をもっている．しかし今のところそれを証明する手立てがない．

参考文献

[I1] 飯高茂，数学の研究をはじめよう／高校生の定義した新しい完全数，その衝撃－前編，現代数学 2017 年 5 月号，現代数学社，pp. 79-85

[I2] 飯高茂，数学の研究をはじめよう／高校生の定義した新しい完全数，その衝撃－後編，現代数学 2017 年 6 月号，現代数学社，pp. 82-87

[K1] 桐山翔伍，メルセンヌ素数とその派生数に関する研究，JSEC2016，優等賞，2016

[K2] 桐山翔伍，メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 VOL23 No1(2017)，pp. 181-190

[Ta] 高木貞治，初等整数論講義第２版，共立出版，(1971)