メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究

桐山　翔伍（津山高専, 電気電子工学科２年）

1　研究の動機

中学の頃から数学，特に整数に関して興味があった．高専で数学クラブに入って約数の話題になり，整数に関する議論をしていくうちに，18 という数の約数 $\{1,2,3,6,9,18\}$ について，約数を２つずつ $1,2 \mid 3,6 \mid 9,18$ というように区切り，それら２つの数をそれぞれ足してみると，

$$1+2=3,\quad 3+6=9=3^2,\quad 9+18=27=3^3$$

という構造があることに気付いた，さらに，約数の中の $6,18$ に関して，

$$6=2\times 3,\quad 18=2\times 3^2$$

が成り立っていることに気が付いた．そこで，$2\times 3^3=54,\ 2\times 3^4=162,\ \cdots$ を調べると，これらも同様な構造をもつことがわかった．つまり，$6,18,54,162,486$ などの 2×3^k の数の約数の構造も，約数を２つずつに区切りそれら２つの数をそれぞれ足してみると，必ず $3^1,3^2,\cdots,3^k$ となっていたのである．

$$\underbrace{1\ 2}_{3}\ |\underbrace{3\ 6}_{3^2}|$$
$$\underbrace{1\ 2}_{3}\ |\underbrace{3\ 6}_{3^2}|\underbrace{9\ 18}_{3^3}|$$
$$\underbrace{1\ 2}_{3}\ |\underbrace{3\ 6}_{3^2}|\underbrace{9\ 18}_{3^3}|\underbrace{27\ 54}_{3^4}|$$
$$\underbrace{1\ 2}_{3}\ |\underbrace{3\ 6}_{3^2}|\underbrace{9\ 18}_{3^3}|\underbrace{27\ 54}_{3^4}|\underbrace{81\ 162}_{3^5}|$$
$$\underbrace{1\ 2}_{3}\ |\underbrace{3\ 6}_{3^2}|\underbrace{9\ 18}_{3^3}|\underbrace{27\ 54}_{3^4}|\underbrace{81\ 162}_{3^5}|\underbrace{243\ 486}_{3^6}|$$

この観点に立って，約数を適当に区切った和が $4^1,4^2,\cdots,4^k$ となっているものや $5^1,5^2,\cdots,5^k$ となっているものがあるのかどうかを調べていった．その結果，4^k に関する構造や 5^k に関する構造を持つものはなくて，次は $7^1,7^2,\cdots,7^k$ の構造をもつものがあり，それは $28,196,1372,9604,67228$ などの $2^2\times 7^k$ の数であった．$28,196,1372,9604,67228$ などの $2^2\times 7^k$ の数の約数の構造は，下の図のように約数を３つずつに区切りそれら３つの

数をそれぞれ足してみると，$7^1, 7^2, \cdots, 7^k$ となっていたのである．

$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|$$
$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|\underbrace{49\ 98\ 196}_{7^3}|$$
$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|\underbrace{49\ 98\ 196}_{7^3}|\underbrace{343\ 686\ 1372}_{7^4}|$$
$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|\underbrace{49\ 98\ 196}_{7^3}|\underbrace{343\ 686\ 1372}_{7^4}|\underbrace{2401\ 4802\ 9604}_{7^5}|$$
$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|\underbrace{49\ 98\ 196}_{7^3}|\underbrace{343\ 686\ 1372}_{7^4}|\underbrace{2401\ 4802\ 9604}_{7^5}|\underbrace{16807\ 33614\ 67228}_{7^6}|$$

さらに研究を行ってみると，次は $2^4 \times 31^k$ という数が見つかり，この数の約数の構造は，約数を５つずつに区切りそれら５つの数を足してみると，31^1, $31^2, \cdots, 31^k$ となっていた．そしてその次は，$2^6 \times 127^k$ という数であり，この数の約数の構造は，約数を７つずつに区切りそれら７つの数をそれぞれ足してみると，$127^1, 127^2, \cdots, 127^k$ となっていたのである．このような約数の構造は，$3, 7, 31, 127$ といった素数に関係していることから，数学クラブの先生にこのことを説明したところ，それはメルセンヌ素数といわれる数であることを聞かされた．

定義１． **メルセンヌ素数**は，$M_n = 2^{n+1} - 1$ とおいて，n に $1, 2, 3, \cdots$ を代入したとき M_n が素数となるものをいう．

また，$M_n = 1 + 2 + \cdots + 2^n$ であることもわかった．そして上で研究してきた数 3，7，31，127 はそれぞれメルセンヌ素数 M_1，M_2，M_4，M_6 であり，これらの M_n から得られる $D_k = 2^n\ (M_n)^k$ というタイプの数を扱っていたことがわかった．さらにメルセンヌ素数は完全数というものにも関連することがわかった．

定義２． **完全数** x とは，x を除く約数の総和 $\tau(x)$ が x に等しくなるものである．すなわち，$x = \tau(x)$ である．

たとえば，メルセンヌ素数３に関する数 $6 = 2 \times 3$ を例にとると，$\tau(6) = 1 + 2 + 3 = 6$ であるので，6 は完全数である．メルセンヌ素数７に関する数 $28 = 2^2 \times 7$ も $\tau(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ より完全数である．

以上のことから，これらのことにとても興味を覚え，$D_k = 2^n \times\ (M_n)^k$ をメルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数と呼び，それを応用する研究を行うことにした．そして研究の結果，詳細は５節で述べるが，定理１，定理２，定理３という３つの定理を得ることができ，さらにこれらの結果から一般的な完全数と強完全数という概念を定義することができ，新たな研究の領域を発見した．

2　メルセンヌ素数 M_n の第 k 派生数について

まず，メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数というものを定義する．

定義3． 自然数 k に対して，メルセンヌ素数 M_n とそれから得られる $D_k = 2^n(M_n)^k$ をメルセンヌ素数 M_n に関する**第 k 派生数**と呼ぶ．

たとえば，6 は $6 = 2^1 \times 3$ よりメルセンヌ素数 3 に関する第 1 派生数 D_1 であり，18 は $18 = 2^1 \times 3^2$ よりメルセンヌ素数 3 に関する第 2 派生数 D_2 である．28 は $28 = 2^2 \times 7$ よりメルセンヌ素数 7 に関する第 1 派生数 D_1 であり，196 は $196 = 2^2 \times 7^2$ よりメルセンヌ素数 7 に関する第 2 派生数 D_2 である．

メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数 $D_k = 2^n(M_n)^k$ の約数は，その構造上，全部で $(n+1)(k+1)$ 個ある．そこで，D_k の約数を小さい順に並べて，最初の $n+1$ 個の約数を第 1 パート，その次の $n+1$ 個の約数を第 2 パート，さらに次の $n+1$ 個の約数を第 3 パート，以下同様にして第 $k+1$ パートまでを考える．たとえば，196 の約数の第 1 パートは $1, 2, 4$ であり，第 2 パートは $7, 14, 28$，第 3 パートは $49, 98, 196$ である．

$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|\underbrace{49\ 98\ 196}_{7^3}|$$

次のことが成り立つ．

命題 1． メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数 D_k の約数を小さい順に並べたとき，第 j パート（$1 \leqq j \leqq k+1$）の約数の和は $(M_n)^j$ である．

（証明）D_k の約数の構造より明らかである．（証明終）

次に，今後の研究に必要な D_k の約数の部分和である $\eta(D_k)$ を定義する．

定義4． メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数 D_k の約数の D_k を除く第 k パートと第 $k+1$ パートの和を $\eta(D_k)$ とする．これは命題 1 を用いて言い換えると

$$\eta(D_k) = (M_n)^k + (M_n)^{k+1} - D_k$$

とすることである．

たとえば，メルセンヌ素数 7 に関する $D_1 = 28,\ D_2 = 196,\ D_3 = 1372$ はそれぞれ次のようになる．

$$\underbrace{1\ 2\ 4}_{7}\ |\underbrace{7\ 14\ 28}_{7^2}|\underbrace{49\ 98\ 196}_{7^3}|\underbrace{343\ 686\ 1372}_{7^4}|$$

$D_1 = 28$ の場合 : $\eta(28) = 7^1 + 7^2 - 28 = 7 + 49 - 28 = 28$

$D_2 = 196$ の場合 : $\eta(196) = 7^2 + 7^3 - 196 = 49 + 343 - 196 = 196$

$D_3 = 1372$ の場合 : $\eta(1372) = 7^3 + 7^4 - 1372 = 343 + 2401 - 1372 = 1372$

定義５． x 以外の約数をいくつか足して x になるとき、数 x を**擬似完全数**という．

たとえば，18 の場合 $3+6+9=18$，54 の場合 $9+18+27=54$ であるので，18 と 54 は疑似完全数である．18 と 54 はメルセンヌ素数 3 の第 2 派生数と第 3 派生数である．一般的に次のことが証明できた．

命題２． メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数 D_k は疑似完全数である．特に，D_1 は完全数である．

（証明）　$\eta(D_k)=(M_n)^k+(M_n)^{k+1}-D_k$ であり，$\eta(D_k)=D_k$ となっていれば D_k は疑似完全数である．$D_k=2^n(M_n)^k$ より

$$\begin{aligned}\eta(D_k) &= (M_n)^k+(M_n)^{k+1}-2^n(M_n)^k=(M_n)^k(1+M_n-2^n)\\ &= (M_n)^k(1+1+2+\cdots+2^n-2^n)=(M_n)^k(1+1+2+\cdots+2^{n-1})\\ &= (M_n)^k(1+2^n-1)=(M_n)^k2^n=D_k\end{aligned}$$

よって，メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数 D_k は疑似完全数である．特に，$\eta(D_1)$ は D_1 を除く D_1 の約数の和を意味するので，D_1 は完全数である．（証明終）

［**注意１**］　明らかにメルセンヌ素数 M_n に関する第 1 派生数 D_1 は偶数であり，オイラーによると偶数の完全数は D_1 に限ることが証明されている．さらに「奇数の完全数が存在するかどうか」 は未解決問題となっている (高木 [T] 参照)．

完全数については，約数の個数は偶数で，さらにその約数の逆数和は 2 である．完全数のこの性質を別の形で表現した数にオアの調和数と呼ばれるものがある．これは，約数の調和平均が整数値となる数のことであり，完全数はオアの調和数である．この点を意識して，本研究でも第 k 派生数 D_k の調和性に関する研究を試みたが，あまりうまくいかなかった．しかし，完全数の約数の逆数和が 2 であることは，何か意味があるのではないかと思い，疑似完全数である第 k 派生数 D_k の約数の逆数和について研究した．

命題３． メルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数 D_k の約数の第 k パートと第 $k+1$ パートの数の逆数和 S_k は次式で表される．

$$S_k=\frac{2}{(M_n)^{k-1}}$$

(証明)　$M_n=1+2+\cdots+2^n$ より，

$$\begin{aligned}S_k &= \frac{1}{M_n^{k-1}}+\frac{1}{2(M_n)^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n(M_n)^{k-1}}+\frac{1}{(M_n)^k}+\cdots+\frac{1}{2^n(M_n)^k}\\ &= \frac{1+2+\cdots+2^n+M_n+\cdots+2^nM_n}{2^n(M_n)^k}=\frac{M_n+M_n^2}{2^n(M_n)^k}=\frac{2}{(M_n)^{k-1}}\end{aligned}$$

よって，D_k の約数の第 k パートと第 $k+1$ パートの数の逆数和 S_k は $\dfrac{2}{(M_n)^{k-1}}$ になる．
(証明終)

3　これまでの完全数に関する研究

上に述べた本研究で扱っているメルセンヌ素数 M_n に関する第 k 派生数は，$M_n = 1+2+\cdots+2^n$ を基礎にした研究であると考えることができる．そうすると，${}^3M_n = 1+3+\cdots+3^n$ や ${}^5M_n = 1+5+\cdots+5^n$ などから同様な研究ができないかと思えた．そのことを数学クラブの先生に申し出たところ，それはメルセンヌ素数や完全数を一般化する方向の研究とみることができるので，そのような論文を調べようという指示があった．この立場からのこれまでの研究を MathSciNet という数学の論文検索サービスで調べてみると，T.Yamada[Y] の研究，A.Bege 等 [B] の研究が見つかった．T.Yamada[Y] の研究や A.Bege 等 [B] の研究は，ある数 N の約数の和を $\sigma(N)$ としたとき，N が完全数ならば $\sigma(N) = 2N$ であるが，$\sigma(\sigma(N)) = 2N$ とした場合の研究を行っていた．そしてそれをさらにそれぞれの立場から一般化の試みがなされた研究であり，本研究の方向性とは異なっていた．また，最近，飯高 [I] の研究が出版された．これは本研究の方向性に近いものではあったが，厳密には異なる研究となっている．以上のことから，本研究はこれまで扱われてこなかった領域であるのではないかと考え，この研究を進めることをきめた．

4　素数 3 に関するメルセンヌ素数 ${}^3M_n$ の第 k 派生数

本研究においてこれまでメルセンヌ素数 M_n から第 k 派生数 D_k に関する 3 つの命題を発見し証明した．しかし，整数に関する本を見ていると，得られた結果は良く知られているものであった．それでも証明のアプローチが異なるので，それを重視して，${}^3M_n = 1+3+\cdots+3^n$ や ${}^5M_n = 1+5+\cdots+5^n$ などを用いて同様な研究ができないかと考えた．そこでこの節では，${}^3M_n = 1+3+\cdots+3^n$ を用いた研究について述べていく．改めて ${}^3M_n = 1+3+3^2+\cdots+3^n$ と置く．このとき，等比数列の計算により ${}^3M_n = (3^{n+1}-1)/2$ が得られることを注意しておく．

定義６． ${}^3M_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ が素数になるとき，${}^3M_n$ を **3-メルセンヌ素数**とよぶ．

たとえば，${}^3M_2 = \dfrac{3^{2+1}-1}{2} = 13$ となり，これは 3-メルセンヌ素数である．その次の 3-メルセンヌ素数は ${}^3M_6 = 1093$，その次は ${}^3M_{12} = 797161$ である．

定義７． 自然数 k に対して，3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ と，それから得られる $D_k = 3^n \times ({}^3M_n)^k$ を **3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数**と呼ぶ．

たとえば，117, 1521 を例にとると，$117 = 3^2\times 13^1$ であり ${}^3M_2 = 13$ であるので，117 は 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_2 = 13$ に関する第 1 派生数 D_1 である．また，$1521 = 3^2\times 13^2$ であるので，1521 は 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_2 = 13$ に関する第 2 派生数 D_2 である．

3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の約数を小さい順に並べたとき，そのパートの構造は，例えば ${}^3M_2 = 13$ に関する第 2 派生数 $D_2 = 1521$ については以下のようになっていた．

$$\underbrace{1\ 3\ 9}_{13}\ |\underbrace{13\ 39\ 117}_{13^2}|\underbrace{169\ 507\ 1521}_{13^3}|$$

次の命題 4 は，命題 1 に対応する約数のパートの構造に関するものである．

命題 4． 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の約数の第 j パート（$1 \leqq j \leqq k+1$）の約数の和は $({}^3M_n)^j$ である．

（証明）命題 1 と同様で，D_k の約数の構造より明らかである．(証明終)

定義 8． 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の D_k を除く第 k パートと第 $k+1$ パートの和を $\eta(D_k)$ とする．命題 4 を用いて言い換えると

$$\eta(D_k) = ({}^3M_n)^k + ({}^3M_n)^{k+1} - D_k$$

とすることである．

さらに，3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k に関する次の公式も発見した．

命題 5． 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k について以下が成り立つ．

$$D_k = 2\eta(D_k) - ({}^3M_n)^k$$

（証明）　定義 7 より $D_k = 3^n \times ({}^3M_n)^k$ であり，命題 6 より $\eta(D_k) = ({}^3M_n)^k + ({}^3M_n)^{k+1} - D_k$ であるので，

$$\begin{aligned}
\eta(D_k) &= ({}^3M_n)^k + ({}^3M_n)^{k+1} - 3^n \times ({}^3M_n)^k = ({}^3M_n)^k(1 + {}^3M_n - 3^n) \\
&= ({}^3M_n)^k(1 + 1 + 3 + \cdots + 3^{n-1}) = ({}^3M_n)^k \left(1 + \frac{3^n - 1}{2}\right) \\
&= ({}^3M_n)^k + \frac{({}^3M_n)^k(3^n - 1)}{2}
\end{aligned}$$

である．よって　$\eta(D_k) = ({}^3M_n)^k + \dfrac{({}^3M_n)^k(3^n - 1)}{2}$ であり，これより，

$$\begin{aligned}
& 2\eta(D_k) - ({}^3M_n)^k = ({}^3M_n)^k + ({}^3M_n)^k(3^n - 1) \\
= \ & ({}^3M_n)^k + 3^n \times ({}^3M_n)^k - ({}^3M_n)^k = 3^n \times ({}^3M_n)^k = D_k
\end{aligned}$$

（証明終）

3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の逆数和に関しても次の結果を得ることができた．

命題６．　3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の第 k パートと第 $k+1$ パートの数の逆数和 S_k は次式で表される．

$$S_k = \frac{1+\ {}^3M_n}{3^n(\ {}^3M_n)^{k-1}}$$

特に，$S_1 = \dfrac{1+\ {}^3M_n}{3^n}$ である．

(証明)　${}^3M_n = 1+3+\cdots+3^n$ より，

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{(\ {}^3M_n)^{k-1}} + \frac{1}{3(\ {}^3M_n)^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{3^n(\ {}^3M_n)^{k-1}} + \frac{1}{(\ {}^3M_n)^k} + \cdots + \frac{1}{3^n(\ {}^3M_n)^k} \\ &= \frac{1+3+\cdots+3^n+\ {}^3M_n+\cdots+3^n(\ {}^3M_n)}{3^n(\ {}^3M_n)^k} = \frac{(\ {}^3M_n)+(\ {}^3M_n)^2}{3^n(\ {}^3M_n)^k} = \frac{1+\ {}^3M_n}{3^n(\ {}^3M_n)^{k-1}} \end{aligned}$$

よって，D_k の第 k パートと第 $k+1$ パートの数の逆数和 S_k は $\dfrac{1+\ {}^3M_n}{3^n(\ {}^3M_n)^{k-1}}$ になる．

(証明終)

[注意２]　命題 3 と命題 6 の結果も非常に類似したものである．それは，命題 3 における公式 $S_k = \dfrac{2}{(M_n)^{k-1}}$ を $M_n = 2^{n+1}-1$ で書き直すと，$S_k = \dfrac{1+M_n}{2^n(M_n)^{k-1}}$ となるからである．

5　素数 p に関するメルセンヌ素数 ${}^pM_n$ の第 k 派生数について

前節までに素数 2 と 3 に関するメルセンヌ素数の第 k 派生数に関する 6 つの命題を発見し証明した．これらの研究を踏まえて，より一般的な研究を行った．

素数 p に対して ${}^pM_n = 1+p+p^2+\cdots+p^n$ と置く．このとき，等比数列の計算により ${}^pM_n = \dfrac{p^{n+1}-1}{p-1}$ が得られる．

定義９． ${}^pM_n = \dfrac{p^{n+1}-1}{p-1}$ が素数になるとき，${}^pM_n$ を p**-メルセンヌ素数**とよぶ．

たとえば，5-メルセンヌ素数としては，${}^5M_2 = 31$，${}^5M_6 = 19531$ などがあり，7-メルセンヌ素数としては，${}^7M_4 = 2801$，${}^7M_{12} = 16148168401$ などがある．

定義１０．　自然数 k に対して，p-メルセンヌ素数 ${}^pM_n$ と，それから得られる $D_k = p^n(\ {}^pM_n)^k$ を p**-メルセンヌ素数** ${}^pM_n$ **に関する第** k **派生数**と呼ぶ．

定理１． p-メルセンヌ素数 ${}^pM_n$ に関する第 k 派生数 D_k の約数の第 j パート（$1 \leqq j \leqq k+1$）の約数の和は $(\ {}^pM_n)^j$ である．

（証明）命題 1 と命題 4 と同様で，D_k の約数の構造より明らかである．(証明終)

定義１１．p-メルセンヌ素数 ${}^{p}M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の約数の D_k を除く第 k パートと第 $k+1$ パートの和を $\eta(D_k)$ とする．定理１を用いて言い換えると

$$\eta(D_k) = (\,{}^{p}M_n)^k + (\,{}^{p}M_n)^{k+1} - D_k$$

とすることである．

定理２． p-メルセンヌ素数 ${}^{p}M_n$ に関する第 k 派生数 D_k について以下が成り立つ．

$$D_k = (p-1)\eta(D_k) - (p-2)(\,{}^{p}M_n)^k$$

（証明）　定義１０より $D_k = p^n(\,{}^{p}M_n)^k$ であり，定義１１より $\eta(D_k) = (\,{}^{p}M_n)^k + (\,{}^{p}M_n)^{k+1} - D_k$ であるので，

$$\begin{aligned}
\eta(D_k) &= (\,{}^{p}M_n)^k + (\,{}^{p}M_n)^{k+1} - p^n(\,{}^{p}M_n)^k = (\,{}^{p}M_n)^k(1 + {}^{p}M_n - p^n) \\
&= (\,{}^{p}M_n)^k(1 + 1 + p + \cdots + p^{n-1}) = (\,{}^{p}M_n)^k\left(1 + \frac{p^n - 1}{p-1}\right) \\
&= (\,{}^{p}M_n)^k + \frac{(\,{}^{p}M_n)^k(p^n - 1)}{p-1}
\end{aligned}$$

である．よって　$\eta(D_k) = (\,{}^{p}M_n)^k + \dfrac{(\,{}^{p}M_n)^k(p^n - 1)}{p-1}$ であり，

$$\begin{aligned}
(p-1)\eta(D_k) &= (p-1)(\,{}^{p}M_n)^k + (\,{}^{p}M_n)^k(p^n - 1) \\
&= (p-1)(\,{}^{p}M_n)^k + p^n(\,{}^{p}M_n)^k - (\,{}^{p}M_n)^k \\
&= (p-2)(\,{}^{p}M_n)^k + p^n(\,{}^{p}M_n)^k
\end{aligned}$$

であり，これより

$$(p-1)\eta(D_k) - (p-2)(\,{}^{p}M_n)^k = p^n(\,{}^{p}M_n)^k = D_k$$

を得る．よって，$D_k = (p-1)\eta(D_k) - (p-2)(\,{}^{p}M_n)^k$ である．（証明終）

定理３．p-メルセンヌ素数 ${}^{p}M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の第 k パートと第 $k+1$ パートの数の逆数和 S_k は次式で表される．

$$S_k = \frac{1 + {}^{p}M_n}{p^n(\,{}^{p}M_n)^{k-1}}$$

特に，$S_1 = \dfrac{1 + {}^{p}M_n}{p^n}$ である．

(証明)　${}^{p}M_n = 1 + p + \cdots + p^n$ より，

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{1}{(\,{}^{p}M_n)^{k-1}} + \frac{1}{p(\,{}^{p}M_n)^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{p^n(\,{}^{p}M_n)^{k-1}} + \frac{1}{(\,{}^{p}M_n)^k} + \cdots + \frac{1}{p^n(\,{}^{p}M_n)^k} \\
&= \frac{1 + p + \cdots + p^n + {}^{p}M_n + \cdots p^n(\,{}^{p}M_n)}{p^n(\,{}^{p}M_n)^k} \\
&= \frac{(\,{}^{p}M_n) + (\,{}^{p}M_n)^2}{p^n(\,{}^{p}M_n)^k} = \frac{1 + {}^{p}M_n}{p^n(\,{}^{p}M_n)^{k-1}}
\end{aligned}$$

である．よって，p-メルセンヌ素数 ${}^{p}M_n$ に関する第 k 派生数 D_k の約数の逆数和 S_k は $\dfrac{1+({}^{p}M_n)}{p^n({}^{p}M_n)^{k-1}}$ になる．(証明終)

6 素数 p に関する完全数について

定理 2 によって，p-メルセンヌ素数 ${}^{p}M_n$ に関する第 1 派生数 D_1 の公式

$$D_1 = (p-1)\eta(D_1) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

を得たが，これは $p=2$ のとき $D_1=\eta(D_1)=\tau(D_1)$ をみたすため，上の式は完全数の一般化であると考えることができる．そこで，次のことを定義し研究を進めた．

定義１２． 素数 p に関する完全数 x とは，

$$x = (p-1)\tau(x) - (p-2)\,{}^{p}M_n$$

をみたすものとする．さらに，x の約数の逆数和 S が適当な自然数 a で p^aS が自然数となるとき，x を素数 p に関する**強完全数**と呼ぶ.

[**注意３**] 命題 2 の注意 1 において,「奇数の完全数が存在するかどうか」 は未解決問題となっていることを述べたが，$p \geq 3$ のとき，素数 p に関する完全数 x は全て奇数であることは上の定義からすぐにわかる．

[**注意４**] 定理 2 と定理 3 から，p-メルセンヌ素数 ${}^{p}M_n$ に関する第 1 派生数 D_1 は素数 p に関する強完全数である．

さて，$p=3$ に関する完全数 x は $x=2\tau(x)-{}^{3}M_n$ であるが，$1 \leq x \leq 10^5$ の範囲でコンピューターを用いて調査した結果，3-メルセンヌ素数 ${}^{3}M_n$ の第 1 派生数 D_1 以外に，1809 と 18549 が見つかった．これらの分析結果は以下である．

(1) $p=3$ に関する完全数 1809 について

約数の逆数和は，$S=(40\times\ 68)/(3^3\times 67)$ であるため，1809 は強完全数ではない．次に 1809 の完全数としての約数の構造を調べると，以下のようになっていた．

$$\underbrace{1\ 3\ 9\ 27}_{40}\ \left|\underbrace{67\ 201\ 603\ 1809}_{40\times 67}\right|$$

ここにある 67 は素数であるが，$67=(5\times 3^3-1)/2$ であるので 3-メルセンヌ素数 ${}^{3}M_n$ ではない．しかし，$1809=3^3\times 67$ であり，1809 の約数の第 1 パートの合計は 40, そして第 2 パートの合計は 40×67 となっており，3-メルセンヌ素数 ${}^{3}M_n$ の第 1 派生数 D_1 と類似の構造をもっていることがわかる．

(2) $p=3$ に関する完全数 18549 について

約数の逆数和は，$S=(121\times\ 230)/(3^4\times\ 229)$ であるため，1809 は強完全数ではない．次に 18549 の完全数としての約数の構造は以下のようになっていた．

$$\underbrace{1\ 3\ 9\ 27\ 81}_{121}\ \left|\underbrace{229\ 687\ 2061\ 6183\ 18549}_{121\times 229}\right|$$

ここにある 229 も素数であるが，$229 = (17 \times 3^3 - 1)/2$ であるので 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ ではない．しかし，これについても $18549 = 3^4 \times 229$ であり，18549 の約数の第 1 パートの合計は 121, そして第 2 パートの合計は 121×229 となっており，やはり 3-メルセンヌ素数 ${}^3M_n$ の第 1 派生数 D_1 と類似の構造をもっていた．

このことから，現在，p-メルセンヌ素数 ${}^pM_n$ の第 1 派生数 D_1 以外の素数 p に関する完全数 x に強く興味をもっており，この研究を進めるにあたり，次に述べる重み q 付きの p-メルセンヌ素数という概念が重要であると考えている．

定義１３． 素数 p に対して、素数 w がある自然数 a とある素数 q により

$$w = \frac{qp^a - 1}{p - 1}$$

となっているとき，w を**重み q 付きの p-メルセンヌ素数**といいい，${}^{q*p}M_a$ とかく．

たとえば，$p = 3$ のときに $w = 67,\ 229$ とすると，それぞれ以下のようになる．

$$67 = \frac{5 \times 3^3 - 1}{2}, \quad 229 = \frac{17 \times 3^3 - 1}{2}$$

これより，67 は重み 5 付きの 3-メルセンヌ素数 ${}^{5*3}M_3$, 229 は重み 17 付きの 3-メルセンヌ素数 ${}^{17*3}M_4$ である．重み q 付きの p-メルセンヌ素数を用いた素数 p に関する完全数 x については，現在研究中である．また，素数 p に関する強完全数については,『p-メルセンヌ素数 ${}^pM_n$ の第 1 派生数 D_1 以外には存在しないだろう』という仮説を立てている．

謝辞

査読の先生方には，本論文を注意深く読んでいただき，励ましのコメントと，その他に表現として至らない多くの箇所を細かく指摘していただきました．ここに深くお礼を申し上げます．

参考文献

[B] A.Bege, K.Forgarasi, Generalized perfect numbers, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) pp73-82

[Y] T. Yamada, Unitary super perfect numbers, Math. Pannon. 19 (2008), no. 1, pp37-47.

[I] 飯高茂，数学の研究をはじめよう (I), 現代数学社, (2016)

[T] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版, (1971)