

k-ピタゴラス数の代数と幾何学

津山工業高等専門学校

菅原孝慈（情報工学科2年）

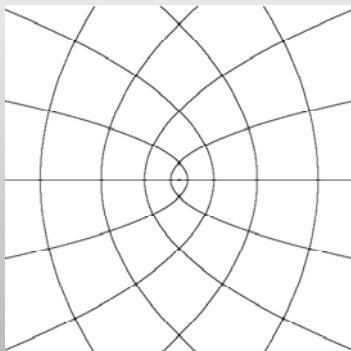
野山由貴（情報工学科2年）

草地弘幸（電子制御工学科1年）

もくじ

- *第1章 ピタゴラス数の幾何学
- *第2章 ピタゴラス数の代数学
- *第3章 代数的極小元の幾何学の考察

*第1章 ピタゴラス数の幾何学的研究の動機



交点に注目すると,2つの曲線が直交しているように見える.
これらは本当に直交しているのだろうか・・・.
そう思いながら研究を始めた.

課題

$$x^2 + ky^2 = z^2 \text{をみたす}$$

xy 平面上の点 (x, y) を研究せよ.

(交点についていろいろ調べる)

$a^2 + b^2 = c^2$ をみたすピタゴラス数を線でむすんだ図

* 第2章 ピタゴラス数の代数的研究の動機

「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」を読んで
すべてのピタゴラス数が、1つの行列で生成されることを知った。

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(左は、本に出てくるピタゴラス行列である.)

では、 $a^2 + kb^2 = c^2$ の場合はどうだろう？

<我々がたてた問題>

$a^2 + kb^2 = c^2$ をみたす k -ピタゴラス数 (a, b, c) を

生成する行列を発見し、研究せよ。

* 第3章 代数的極小元の幾何学的考察の概要

代数的研究により、 k -ピタゴラス数には
極小元が存在することがわかった。

これらの極小元が幾何学的にどのような
意味をもつのか、今後の課題となった。

この章では現在の研究で得られた予想を扱う。

* 第1章 ピタゴラス数の幾何学

§1 ピタゴラス点と放物線の図

t, w をパラメータをして

(t, w は互いに素で、

片方が奇数で、もう片方が偶数)

$$\begin{cases} x = t^2 - w^2 \\ y = 2tw \\ z = t^2 + w^2 \end{cases}$$

と表せる。

まず最初に $x^2 + y^2 = z^2$ を $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ とする。

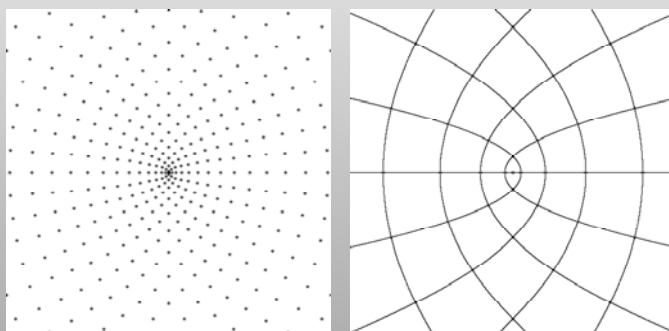
それを円の方程式 $X^2 + Y^2 = 1$ に置き換え

$Y = m(X+1)$ を代入することにより

左の各式を得る。

また、得た各式を使いプログラムを作成、

その結果、 xy 平面上で以下のような図を得た。



放物線のようなものがみえる(左)。

放物線どうしが直角に交わっている
ようにみえる(左)。

では、本当に直角なのだろうかと疑問に
思い研究を進めた。

< xy 平面における放物線 >

$$C_t : y^2 = -4t^2(x - t^2)$$

$$C_w : y^2 = 4w^2(x + w^2)$$

という2つのタイプの放物線族 C_t, C_w を得る.

定理1

C_t と C_w はすべての交点で直交する。

(証明)

C_t の $x = a$ における微分係数は、

$$y'(a) = \frac{-2t^2}{b} \text{ で、これを } m_1 \text{ とする.}$$

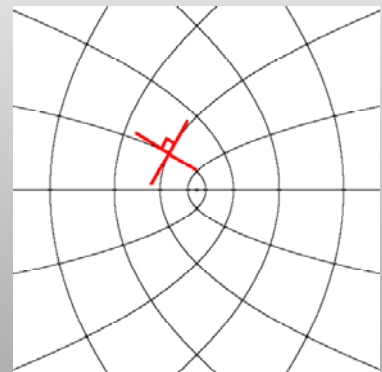
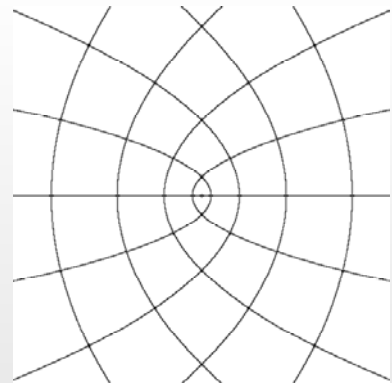
C_w の $x = a$ における微分係数は

$$y'(a) = \frac{2w^2}{b} \text{ で、これを } m_2 \text{ とする.}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{-4t^2w^2}{b^2} = \frac{-4t^2w^2}{(2tw)^2} = -1 \text{ より}$$

C_t を C_w の点 (a, b) における接線は互いに直行する.

(証明終)



< yz 平面における放物線 >

$$C_t : y^2 = 4t^2(z - t^2)$$

$$C_w : y^2 = 4w^2(z - w^2)$$

定理2

C_t と C_w の交点において、
それぞれの接線の傾きを m_t, m_w とすると
 $m_t \cdot m_w = 1$ となる.

(定理1と同様に証明できる.)

< xz 平面における直線 >

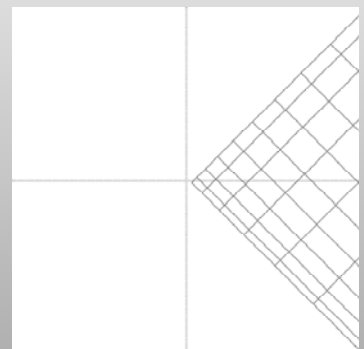
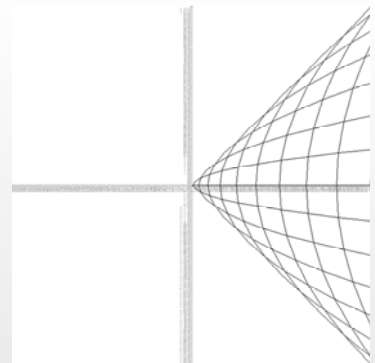
$$L_t : z = -x + 2t^2$$

$$L_w : z = x - 2w^2$$

定理3

L_t と L_w はすべての交点で直交する.

(傾きから証明は明らか.)



§ ピタゴラス点の幾何学的模型



ピタゴラス数の正体について知りたく、我々は各平面の図を利用し、独自に模型を作り上げた．その結果、ピタゴラス点（座標がピタゴラス数となっている点）は円錐上の放物線の交点であることがわかった．



xy平面方向の写真



yz平面方向の写真



xz平面方向の写真

§ k -ピタゴラス数の幾何学における研究方針

これまでは、ピタゴラス数についての研究を進めてきた．その結果、2つの放物線が交わる時、その交点でこれらの放物線の関係が数値的に得られた．そこで、我々は $k \geq 2$ のときの k -ピタゴラス数においても、なんらかの放物線族が得られ、ピタゴラス数のときと同様な現象が起こるのではないかと考えた．

§ k -ピタゴラス数($x^2 + ky^2 = z^2$)の研究($k \geq 2$)

t, w は互いに素で、片方が奇数で、もう片方が偶数

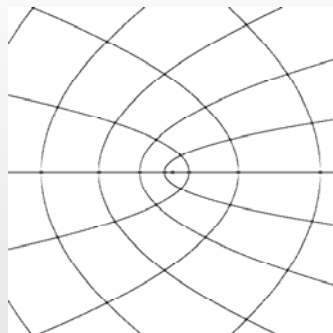
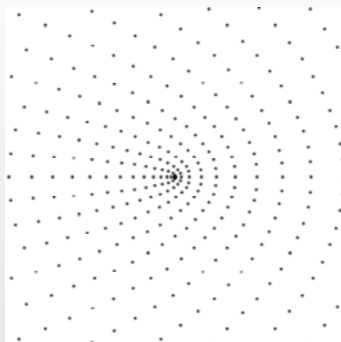
$$\text{パターン 1} \quad \begin{cases} x = t^2 - kw^2 \\ y = 2tw \\ z = t^2 + kw^2 \end{cases}$$

$$\text{パターン 2} \quad \begin{cases} x = kt^2 - w^2 \\ y = 2tw \\ z = kt^2 + w^2 \end{cases}$$

さらに $k \geq 3$ が奇数のとき、 t, w はともに奇数で、互いに素として

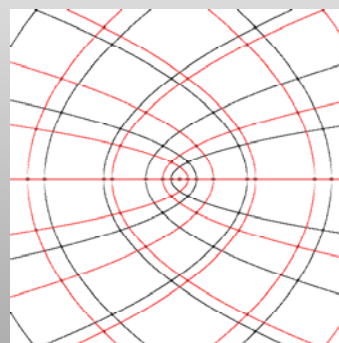
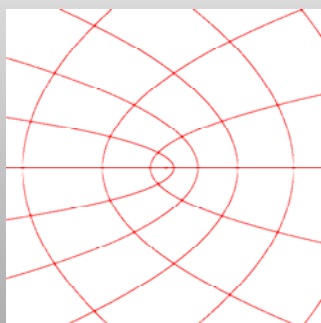
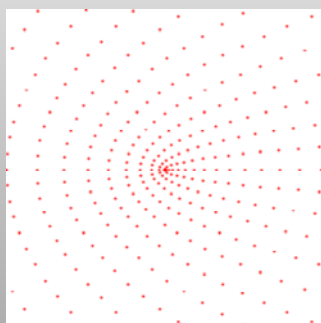
$$\text{パターン 3} \quad \begin{cases} x = \frac{t^2 - kw^2}{2} \\ y = tw \\ z = \frac{t^2 + kw^2}{2} \end{cases} \quad \text{パターン 4} \quad \begin{cases} x = \frac{kt^2 - w^2}{2} \\ y = tw \\ z = \frac{kt^2 + w^2}{2} \end{cases}$$

(例) $k = 2$ の場合 ($x^2 + 2y^2 = z^2$) の調査 (2つのパターン)



パターン1(黒)は左側に、
パターン2(赤)は右側に
視点が向き、放物線族が
1方向しか見えない。
しかし、線にして表示する
ことによって2方向の放物線族が
見られる。

また、2つの放物線が交わる時、
そこに法則性が存在すると思えた。



< xy 平面 >

$$\text{パターン 1} \quad \begin{cases} C_t : y^2 = \frac{-4t^2}{k}(x - t^2) \\ C_w : y^2 = 4w^2(x + kw^2) \end{cases}$$

$$\text{パターン 3} \quad \begin{cases} D_t : y^2 = t^2(2x + kw^2) \\ D_w : y^2 = -\frac{2w^2}{k}(x - \frac{w^2}{2}) \end{cases}$$

$$\text{パターン 2} \quad \begin{cases} \widetilde{C}_t : y^2 = -4t^2(x - kt^2) \\ \widetilde{C}_w : y^2 = \frac{4w^2}{k}(x + w^2) \end{cases}$$

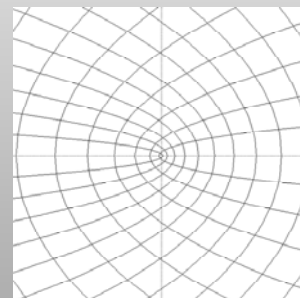
$$\text{パターン 4} \quad \begin{cases} \widetilde{D}_t : y^2 = -2t^2(x - \frac{kw^2}{2}) \\ \widetilde{D}_w : y^2 = \frac{2w^2}{k}(x + \frac{w^2}{2}) \end{cases}$$

定理4 C_t と C_w の交点における接線の傾きを m_t, m_w と

$$\text{すると } m_t \cdot m_w = -\frac{1}{k}$$

$\widetilde{C}_t$ と $\widetilde{C}_w$, D_t と D_w , $\widetilde{D}_t$ と $\widetilde{D}_w$ の場合も同様の定理となる。

(定理1と同様に証明できる.)



< yz 平面 >

$$\text{パターン 1} \quad \begin{cases} C_t : y^2 = \frac{4t^2}{k}(z - t^2) \\ C_w : y^2 = 4w^2(z - kw^2) \end{cases} \quad \text{パターン 3} \quad \begin{cases} D_t : y^2 = \frac{t^2}{2}(z - \frac{t^2}{2}) \\ D_w : y^2 = 2w^2(z - \frac{kw^2}{2}) \end{cases}$$

$$\text{パターン 2} \quad \begin{cases} \widetilde{C}_t : y^2 = 4t^2(z - kt^2) \\ \widetilde{C}_w : y^2 = \frac{4w^2}{k}(z - w^2) \end{cases} \quad \text{パターン 4} \quad \begin{cases} \widetilde{D}_t : y^2 = 2t^2(z - \frac{kt^2}{2}) \\ \widetilde{D}_w : y^2 = \frac{2w^2}{k}(z - \frac{w^2}{2}) \end{cases}$$

定理 5

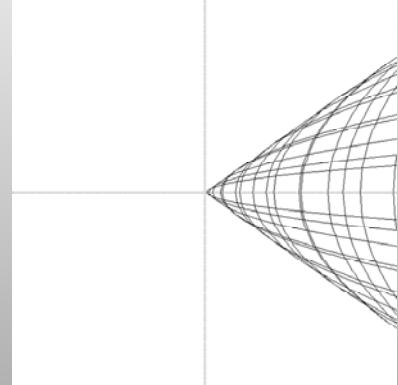
C_t と C_w の交点において、それぞれの接線の傾きを

m_t 、 m_w とすると $m_t \cdot m_w = \frac{1}{k}$ となる。

$\widetilde{C}_t$ と $\widetilde{C}_w$ 、 D_t と D_w 、 $\widetilde{D}_t$ と $\widetilde{D}_w$ の場合も

同様の定理となる。

(定理1と同様に証明できる.)



< xz 平面 >

$$\text{パターン 1} \quad \begin{cases} L_t : z = x - 2kt^2 \\ L_w : z = -x + 2w^2 \end{cases} \quad \text{パターン 3} \quad \begin{cases} l_t : z = x - kt^2 \\ l_w : z = -x + w^2 \end{cases}$$

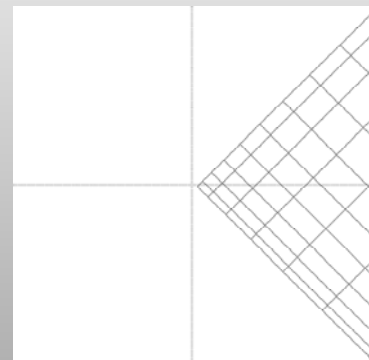
$$\text{パターン 2} \quad \begin{cases} \widetilde{L}_t : z = x - 2t^2 \\ \widetilde{L}_w : z = -x + 2kw^2 \end{cases} \quad \text{パターン 4} \quad \begin{cases} \widetilde{l}_t : z = x - t^2 \\ \widetilde{l}_w : z = -x + kw^2 \end{cases}$$

定理6

L_t と L_w はすべての交点で直交する。

$\widetilde{L}_t$ と $\widetilde{L}_w$ 、 l_t と l_w 、 $\widetilde{l}_t$ と $\widetilde{l}_w$ も同様の定理となる。

(傾きから証明は明らか.)



* 第2章 ピタゴラス数の代数学

§ ピタゴラス行列について（予備知識）

$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ を, ピタゴラス行列、または P 行列という.

命題1 $P^{-1} = P$

既約ピタゴラス数 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に対して (3つの分身) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$ を考える.

※既約ピタゴラス数とは、 a, b, c が互いに素 (最大公約数が 1) なものをいう.

命題2 $P\mathbf{v}_i (i=1,2,3)$ は既約ピタゴラス数である.

命題3 P はすべてのピタゴラス数を生成する行列である.

以上のことが、「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」(小林吹代 著)で扱われていた.

§ k -ピタゴラス数の代数学における研究方針

ピタゴラス行列を使うと、ピタゴラス数 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ から全ての

ピタゴラス数を生成できることを知った.

これから、我々の研究対象である k -ピタゴラス数についても、全ての k -ピタゴラス数に関する k -ピタゴラス行列の存在を示し、その構造を研究することを進めた.

§ k -ピタゴラス数 ($k \geq 2$) の研究

$a^2 + kb^2 = c^2$ をみたす a, b, c は, a と c が奇数、 b が偶数のとき、以下の式で表わされる.

$$\text{パターン1} \begin{cases} a = t^2 - kw^2 \\ b = 2tw \\ c = t^2 + kw^2 \end{cases} \quad \text{パターン2} \begin{cases} a = kt^2 - w^2 \\ b = 2tw \\ c = kt^2 + w \end{cases}$$

$k=1$ ならば $a+b-c > 0$ (ピタゴラス数) となり,

$k \geq 2$ ならば $a+b-c > 0$ とは限らない (例: $k=2$ のとき (7, 40, 57)).

さらに、 $k \geq 3$ の奇数のときは、 a を奇数として、以下の式で表わされる.

$$\text{パターン3} \begin{cases} a = \frac{t^2 - kw^2}{2} \\ b = tw \\ c = \frac{t^2 + kw^2}{2} \end{cases} \quad \text{パターン4} \begin{cases} a = \frac{kt^2 - w^2}{2} \\ b = tw \\ c = \frac{kt^2 + w}{2} \end{cases}$$

この場合も $a+b-c > 0$ とは限らない (例: $k=3$ の奇数のとき (1, 15, 26)).

§ k -ピタゴラス行列

我々の研究は $a^2 + kb^2 = c^2$ をみたす自然数の組 (a, b, c)

すなわち、すべての既約 k -ピタゴラス数を生成する行列を研究することである.

$$P_k := \begin{pmatrix} -2k+1 & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix}$$

を k -ピタゴラス行列、または単に P_k 行列という.

(今回の研究で、この P_k 行列を発見した.)

定理 1 $P_k^{-1} = P_k$

(証明) 実際に計算 $P_k^2 = E$ からわかる. (証明終)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ を } k\text{-ピタゴラス数とし } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

定理 2 $P_k \mathbf{v}_i (i=1,2,3)$ は既約 k -ピタゴラス数である.

(証明) $P_k \mathbf{v}_1$ を考える.

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k+1 & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k(a-b+c)-a \\ 2(a-b+c)+b \\ 2k(a-b+c)+c \end{pmatrix}$$

$x = a - b + c$ とおくと、

$$\begin{aligned} a'^2 + kb'^2 &= 4k^2x^2 - 4kxa + a^2 + 4kx^2 + 4kxb + kb^2 \\ &= 4k^2x^2 + 4kx(x-a+b) + c^2 \\ &= 4k^2x^2 + 4kxc + c^2 \\ &= c'^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の場合も同様に証明できる.

既約性について (証明の続き)

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2k-1) & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2k-1)a - 2kb + 2kc \\ 2a - b + 2c \\ 2ka - 2kb + (2k+1)c \end{pmatrix}$$

(a', b', c') を基本変換する. (以下, R_j は j 行を意味する.)

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\substack{-(R_1 - kR_2) \\ -(R_3 - kR_2)}} \begin{pmatrix} a + kb \\ 2a - b + 2c \\ kb - c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} a + c \\ 2a - b + 2c \\ kb - c \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} a + c \\ b \\ kb - c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - kR_2} \begin{pmatrix} a + c \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$P_k \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, P_k \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$ の既約性も同様に示される. (定理 2 の証明終)

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を k -ピタゴラス数とする.

$P_k^{-1} = P_k$ より $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと, $\begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ c' \end{pmatrix}$ は, また k -ピタゴラス数となる.

このとき、次の命題が成り立つ.

命題4 $a + b - c \leq 0$ ならば、 $a' > 0, b' > 0, c' > 0$ で、さらに、 $a' + b' - c' \geq 0$ が成り立つ.

(証明)

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2k-1) & -2k & 2k \\ -2 & -1 & 2 \\ -2k & -2k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2k-1)a - 2kb + 2kc \\ -2a - b + 2c \\ -2ka - 2kb + (2k+1)c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k(a+b-c) + a (> 0) \\ -2(a+b-c) + b (> 0) \\ -2k(a+b-c) + c (> 0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a' + b' - c' &= -2k(a+b-c) + a - 2(a+b-c) + b + 2k(a+b-c) - c \\ &= -(a+b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

命題5 $a + b - c > 0$ ならば $|a'| < a, |b'| < b, c' < c$

(証明)

まず $c' < c$ を示す.

$$c - c' = c - \{-2ka - 2kb + (2k+1)c\} = 2k(a+b-c) > 0$$

次に $|a'| < a$ を示す.

$a' > 0$ のとき

$$a - a' = a - \{(-2k+1)a - 2kb + 2kc\} = 2k(a+b-c) > 0$$

$a' < 0$ のとき

$$a + a' = a + \{(-2k+1)a - 2kb + 2kc\} = 2a - 2k(a+b-c)$$

証明の続き

(ケ ー ス 1)

$a = t^2 - kw^2, b = 2tw, c = t^2 + kw^2$ のとき

$a + b - c = -2kw^2 + 2tw$ であるので,

$$\begin{aligned} a + a' &= 2t^2 + (4k - 2)kw^2 - 4ktw \\ &= 2(t - kw)^2 + (2k - 2)w^2 > 0 \end{aligned}$$

(ケ ー ス 2)

$a = kt^2 - w^2, b = 2tw, c = kt^2 + w^2$ のとき

$a + b - c = -2w^2 + 2tw$ であるので,

$$\begin{aligned} a + a' &= 2kt^2 + (4k - 2)w^2 - 4ktw \\ &= 2k(t - w)^2 + (2k - 2)w^2 > 0 \end{aligned}$$

証明の続き

さらに、 $k \geq 3$ の場合

(ケ ー ス 3)

$a = \frac{t^2 - kw^2}{2}, b = tw, c = \frac{t^2 + kw^2}{2}$ のとき

$a + b - c = -kw^2 + t$ であるので,

$$\begin{aligned} a + a' &= t^2 + (4k - 1)kw^2 - 2ktw \\ &= (t - kw)^2 + (k - 1)w^2 > 0 \end{aligned}$$

(ケ ー ス 4)

$a = \frac{kt^2 - w^2}{2}, b = tw, c = \frac{kt^2 + w^2}{2}$ のとき

$a + b - c = -w^2 + tw$ であるので,

$$\begin{aligned} a + a' &= kt^2 + (2k - 1)w^2 - 2ktw \\ &= k(t - w)^2 + (k - 1)w^2 > 0 \end{aligned}$$

証明の続き

最後に $|b'| < b$ を示す.

$b \geq 0$ の場合.

$$\begin{aligned} b - b' &= b - \{-2a - b + 2c\} \\ &= 2(a + b - c) > 0 \end{aligned}$$

$b < 0$ の場合.

$$\begin{aligned} b + b' &= b + \{-2a - b + 2c\} \\ &= 2(c - a) > 0 \end{aligned}$$

(命題 5 の 証 明 終)

§ K -ピタゴラス数同士の大小関係

定義1 X を k -ピタゴラス数全体とし, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in X$ とする.

$P_k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1| \\ |b_1| \\ c_1 \end{pmatrix} \in X$ とおく. このことを, $|P_k| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ と表す.

さらに, $|P_k| \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ のとき, $|P_k|^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ と表す. 以下, 帰納的に

$|P_k|^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を定義する. $|P_k|^0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする.

定義2 X を k -ピタゴラス数全体とし, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in X$ とする.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ であるとは, } a+b-c > 0 \text{ であって,}$$

$$\text{ある非負の整数 } n \text{ が存在して } |P_k|^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ のときをいう.}$$

定義2 は, 命題5 より, $a+b-c > 0$ のとき $|a'| < a, |b'| < b, c' < c$ であることをもとに定義した.

また, 命題4 より $a+b-c \leq 0$ となる $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が極小元となることは,

定義2 から明らかである.

定理3 $(X, \leq)$ の極小元は,

$$a+b-c \leq 0 \text{ となる } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ であるか, } a+b-c > 0 \text{ であるものは,}$$

$$\begin{pmatrix} 4k-1 \\ 4 \\ 4k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha+1) \\ 2\alpha+1 \\ 2\alpha^2(\alpha+1)+\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha-1) \\ 2\alpha-1 \\ 2\alpha^2(\alpha-1)+\alpha \end{pmatrix} \text{ である.}$$

ただし, $\alpha = \sqrt{k}$ ($k \geq 4$ は平方数) である.

(証明)

$a+b-c > 0$ の場合を示せば十分である.

極小元を $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする. 命題5 より, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ の

いずれかしかない.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} 4k-1 \\ 4 \\ 4k+1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha+1) \\ 2\alpha+1 \\ 2\alpha^2(\alpha+1)+\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix} = P_k \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha-1) \\ 2\alpha-1 \\ 2\alpha^2(\alpha-1)+\alpha \end{pmatrix} \text{である.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{は } k\text{-ピタゴラス数ではない.}$$

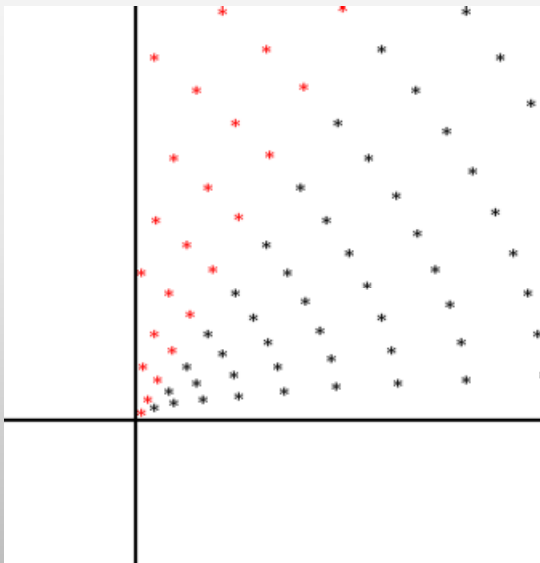
よって、 $a+b-c > 0$ の場合の極小元は、

$$\begin{pmatrix} 4k-1 \\ 4 \\ 4k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha+1) \\ 2\alpha+1 \\ 2\alpha^2(\alpha+1)+\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha^2(\alpha-1) \\ 2\alpha-1 \\ 2\alpha^2(\alpha-1)+\alpha \end{pmatrix} \text{しかない. (証明終)}$$

(注意) $k=1$ のときは $a+b-c > 0$ なので、 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ しかないことがわかる.

* 第3章 代数的極小元の幾何学の考察

§ $k=2$ の場合の極小元の図とリスト



(7,4,9)

(7, 40, 57), (1, 70, 99), (23, 84, 121)

(17, 126, 179), (47, 144, 209), (7, 176, 249)

(41, 198, 283), (79, 220, 321), (31, 260, 369)

(73, 286, 411), (17, 330, 467), (119, 312, 457)

(113, 390, 563), (49, 442, 627), (167, 420, 617)

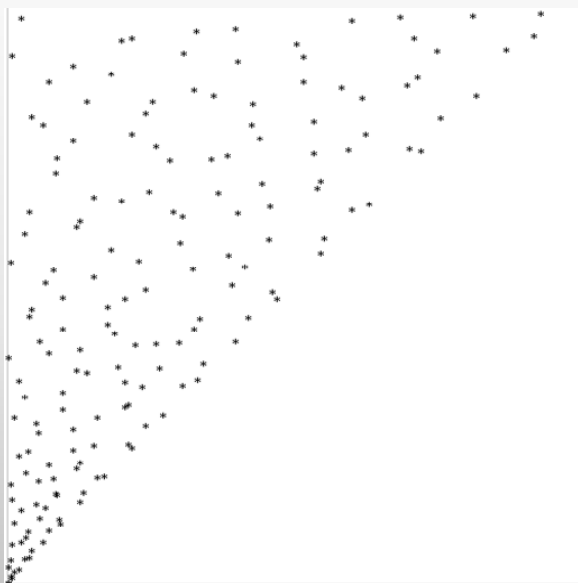
(103, 476, 681), (31, 532, 753), (161, 510, 739)

(89, 570, 811), (223, 544, 801), (151, 608, 873)

(217, 646, 939), (287, 684, 1009) など

$k=2$ のときの $a+b-c \leq 0$ をみたす点(赤色)の図(xy平面)

§ $k = 3$ の場合の極小元のリスト



$k=3$ のときの $a+b-c \leq 0$ をみたす点の図 (xy 平面)

y が偶数の場合

(11, 4, 13)

(11, 24, 43), (23, 40, 73), (11, 80, 139)

(59, 84, 157), (83, 112, 211), (47, 140, 247)

(71, 176, 313), (23, 208, 361), (143, 180, 343)

(47, 252, 439), (179, 220, 421), (131, 260, 469)

(167, 308, 559), (263, 312, 601), (311, 364, 703)

y が奇数の場合

(1, 15, 26), (13, 35, 62), (13, 77, 134)

(61, 99, 182), (37, 117, 206), (97, 143, 266)

など

§ 放物線上の k -ピタゴラス極小点

放物線 $C_t: y^2 = 4t^2(z - t^2)$ 上の k -ピタゴラス極小点が

どのように配置しているかを問題とした.

調査の結果, 以下の予想を得ている.

予想1

各 t について, C_t 上の k -ピタゴラス点の個数は

(1) t が k の倍数の場合, $\left\lfloor \frac{t}{\sqrt{k}} \right\rfloor - \frac{t}{k} + 1$

(2) t が k の倍数でない場合, $\left\lfloor \frac{t}{\sqrt{k}} \right\rfloor - \frac{t}{k}$

予想2

k が偶数の場合, k -ピタゴラス極小点の範囲は, $y \geq \frac{2x}{k-1}$ である.

<さらなる展望>

現在, $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ をみたす自然数解 (3 次元ピタゴラス数) の変換の研究も行ってい

る. 我々の考えている変換は, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ を 3 次元ピタゴラス数として,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \frac{2}{a+d} \begin{pmatrix} 2bc \\ b(b+c) \\ c(b+c) \\ 2bc \end{pmatrix}$$

というものであり, このとき, $\begin{pmatrix} |a'| \\ |b'| \\ |c'| \\ |d'| \end{pmatrix}$ は, 再び 3 次元ピタゴラス数となる. 我々は n 次元ピ

タゴラス数の変換への一般化を研究する上で, 上の式を非常に重要視している. 実際, n 次元ピタゴラス数に関する上の変換の一般式も得ており, n 次元ピタゴラス数の変換理論に発展させるストーリーも考えている. まずは, 3 次元ピタゴラス数の変換理論を完全に構築することが, 当面の中心課題である.