

k -パスカル三角形の自己相似性の研究

井上昌樹，山本裕子（津山工業高等専門学校情報工学科 3 年）

1. はじめに

私たちの研究は、シェルピンスキーのガスケットの一般化を得ることである。
そして、パスカル三角形 (mod 2) はシェルピンスキーのガスケットであることが、知られている。

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

パスカル三角形 (mod 2) において、私たちが注目したのは、上 2 段目までの

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \end{array}$$

である。これを 1 と考えることで、パスカル三角形 (mod 2) は再びパスカル三角形 (mod 2) になるという自己相似性をもっている。以下に k - パスカル三角形 (mod m) の自己相似性について研究する。

2. 定義と主定理

定義 1 (k - パスカル三角形 (mod m))

k - パスカル三角形 (mod m) とは,

$$(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

の展開式に表れる係数を mod m で考え, それらを各段ごとに並べて作った数の三角形のことである。

ただし, $(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1)^n$ の係数の段を, n 段とする。

【注意】 k - パスカル三角形 (mod m) は考えている段の隣り合う k 個の数の和が次の段の数を形成する。

定義 2 (第1種単位三角形)

k - パスカル三角形 (mod m) において, 0 段と 1 段で作られる三角形を第1種単位三角形といい, 記号で $\Delta(U_1)$ と書く。

定義 3 (第1種単位三角形の α 倍と係数)

第1種単位三角形 $\Delta(U_1)$ のすべての成分が α 倍されている三角形を,

$$\alpha \Delta(U_1)$$

と表し, $\Delta(U_1)$ の α 倍という。また α を $\Delta(U_1)$ の係数という。

例)

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 2 & 2 & 2 \end{array} = 2 \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 4 (単位三角形の配置)

k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ において、もし $\alpha \Delta(U_1)$ と $\beta \Delta(U_1)$ が存在し、さらに最下位の段が同じ段にあって、その横の間隔に j 個の数があるとき、 $\alpha \Delta(U_1)$ と $\beta \Delta(U_1)$ は横に j 間隔で配置しているという。

もし $\alpha \Delta(U_1)$ と $\beta \Delta(U_1)$ が存在し、 $\alpha \Delta(U_1)$ よりも下の段に $\beta \Delta(U_1)$ があった場合、 $\alpha \Delta(U_1)$ の最下位の段と $\beta \Delta(U_1)$ の最上位の段の間の段数が h だったとき、 $\alpha \Delta(U_1)$ と $\beta \Delta(U_1)$ は縦に h 間隔で配置しているという。

定義 5 (1次の自己相似性)

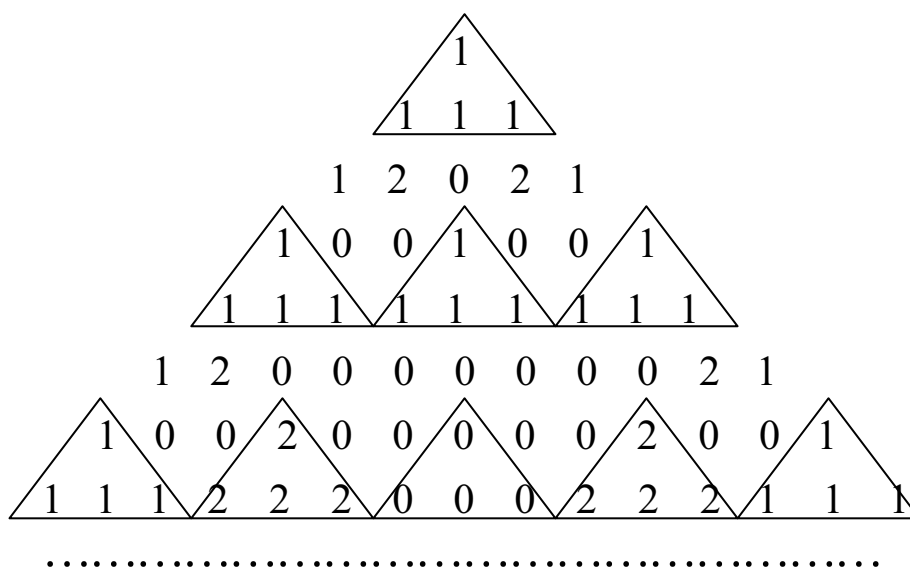
k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ が1次の自己相似性をもつとは、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の中に表れるすべての第1種単位三角形の α 倍 ($\alpha = 1, 2, \dots$)の三角形 $\alpha \Delta(U_1)$ だけに着目し、それらが縦に h 、横に j という規則的な間隔で配置していて、さらに第1種単位三角形の係数をすべて抽出して作った三角形がまた k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ になっているときをいう。また、対 (h, j) を、自己相似性をつくる間隔という。

さらに、1次の自己相似性から得られる k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ を、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の1次の自己相似形という。

例 3 - パスカル三角形 (mod 3)

1 次の自己相似性, 自己相似性をつくる間隔は(1,0)

* この厳密な証明は主定理で扱う。



定理 1 (主定理) p を素数とし, k - パスカル三角形 (mod p) を考える。このとき, 次が成り立つ。

(1) $k \leq p$ のとき, k - パスカル三角形 (mod p) は 1 次の自己相似性を持つ。

さらに, 自己相似性をつくる間隔は $(p-2, p-k)$ である。

(2) $p^{t-1} < k \leq p^t$ ($t = 2, 3, \dots$) のとき, k - パスカル三角形 (mod p) は 1 次の

自己相似性を持つ。さらに, 自己相似性をつくる間隔は (p^t-2, p^t-k) である。

3. 定理 1 の証明

以下において、定理 1 の証明の準備を行う。

定義 6 ($O(l)$ - 拡大)

数の列 $a_1 a_2 \cdots a_r$ と、すべての i について、 a_i と a_{i+1} の間に l 個の 0 を挿入してできた数の列

$$a_1 \underbrace{00\cdots 0}_l a_2 \underbrace{00\cdots 0}_l \cdots a_{r-1} \underbrace{00\cdots 0}_l a_r$$

を、 $a_1 a_2 \cdots a_r$ の $O(l)$ - 拡大という。

命題 1 p を素数とする。このとき、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } p)$ に $\overbrace{11\cdots 1}^k$ の $O(p^{n-1}-1)$ - 拡大が存在する。

【証明】 $n=1$ のときは、明らかに存在する。

$n \geq 2$ のとき、 $\text{mod } p$ において、 $(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つことに注意する。

$n=2$ の場合。

$$\begin{aligned} (x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1)^p &= x^{p(k-1)} + (x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1)^p \\ &= x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + (x^{k-3} + \cdots + x + 1)^p = \cdots \\ &= x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + x^{p(k-3)} + \cdots + x^p + 1 \end{aligned}$$

である。最後の式の係数をみると、

$$\underbrace{100\cdots 01}_{p-1} \underbrace{00\cdots 01}_{p-1} \cdots \underbrace{100\cdots 01}_{p-1}$$

なので、これは $\overbrace{11\cdots 1}^k$ の $O(p-1)$ - 拡大である。

$n = 3$ の場合。

$$\begin{aligned} & \left(x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1\right)^{p^2} = \left\{ \left(x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1\right)^p \right\}^p \\ & = \left(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + \cdots + x^p + 1\right)^p = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & = x^{p^2(k-1)} + x^{p^2(k-2)} + \cdots + x^{p^2} + 1 \end{aligned}$$

である。最後の式の係数をみると、

$$\underbrace{100\dots 01}_{p^2-1} \underbrace{00\dots 01}_{p^2-1} \dots \underbrace{100\dots 01}_{p^2-1}$$

なので、これは $\overbrace{11\cdots 1}^k$ の $O(p^2 - 1)$ - 拡大である。

この議論をくりかえす，すなわち数学的帰納法により， k - パスカル三角形

(mod p) に $\overbrace{11\cdots 1}^k$ の $O(p^{n-1}-1)$ - 拡大が存在することが示される。

(証明終)

命題 2 p を素数とし, k - パスカルの三角形 (mod p) を考える。このとき, 次が成り立つ。

(1) $k \leq p$ ならば ap 段目 ($a=1, 2, \dots$) は a 段目の $O(p-1)$ - 拡大である。

(2) $p^{t-1} < k \leq p^t$ ($t=2,3,\dots$) ならば ap^t 段目 ($a=1,2,\dots$) は a 段目の $O(p^t-1)$ - 拡大である。

【証明】 (1) $a=1$ の場合。

$$(x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1)^p = x^{p(k-1)} + (x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1)^p$$

$$\begin{aligned}
&= x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + \left(x^{k-3} + \cdots + x + 1\right)^p = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&= x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + x^{p(k-3)} + \cdots + x^p + 1
\end{aligned}$$

である。最後の式の係数をみると、

$$\underbrace{100\cdots 01}_{p-1} \underbrace{00\cdots 0}_{p-1} \cdots \underbrace{100\cdots 01}_{p-1}$$

なので、これは $\overbrace{11\cdots 1}^k$ の $O(p-1)$ - 拡大である。

ap 段目は、

$$\begin{aligned}
&\left(x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1\right)^{ap} \\
&= \left(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + x^{p(k-3)} + \cdots + x^p + 1\right)^a
\end{aligned}$$

の係数である。ここで、 $X = x^p$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&\left(x^{p(k-1)} + x^{p(k-2)} + x^{p(k-3)} + \cdots + x^p + 1\right)^a \\
&= \left(X^{(k-1)} + X^{(k-2)} + X^{(k-3)} + \cdots + X + 1\right)^a
\end{aligned}$$

となり、最後の式は、 a 段目を求めるときに使う式と同じである。 $X = x^p$ だったので、 ap 段目は a 段目の $O(p-1)$ - 拡大であるといえる。

(2) p^t 段目は、

$$\begin{aligned}
&\left(x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + x + 1\right)^{p^t} \\
&= x^{p^t(k-1)} + x^{p^t(k-2)} + x^{p^t(k-3)} + \cdots + x^{p^t} + 1
\end{aligned}$$

の係数で、(1) と同様に $X = x^{p^t}$ と考えると、 ap^t 段目は a 段目の $O(p^t-1)$ - 拡大であるといえる。

(証明終)

【 k - パスカル三角形 (mod m) のモチーフ Δ_U による構成法】

k - パスカル三角形 (mod m) の 0 段から U 段目までで作られる三角形を考え、それを記号で、

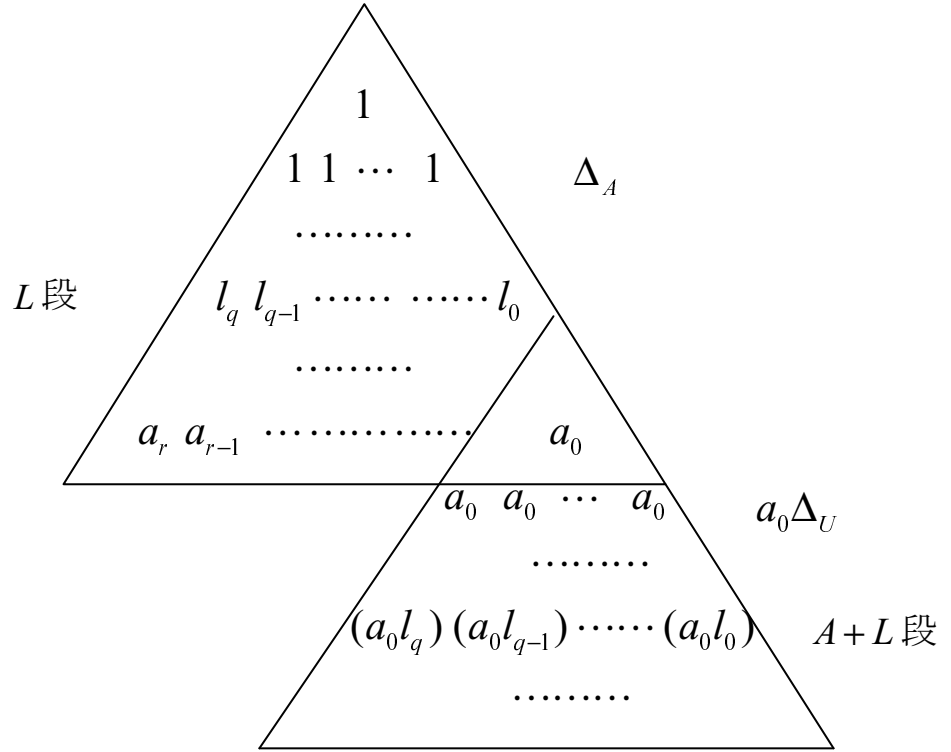
$$\Delta_U$$

とする。さらに Δ_U のすべての成分が α 倍されている三角形を $\alpha\Delta_U$ で表す。 $\alpha\Delta_U$ の 0 段は α であることに注意する。

さて、 $U \leq A$ となる A をとり、0 段から A 段目までで作られる三角形 Δ_A を考え、 Δ_A の最下位の段 (A 段目) に表れる数の列を、 $a_r a_{r-1} \cdots a_0$ 、 Δ_A の中の途中の L 段目 ($L \leq A$) に表れる数の列を、 $l_q l_{q-1} \cdots l_0$ とする。このとき $q \leq r$ である。

ステップ 1) Δ_A と $a_0\Delta_U$ を用いて、 Δ_A の A 段目の右端の数 a_0 と $a_0\Delta_U$ の 0 段の数 a_0 を重ねて張り合わせることを、 Δ_A に対するモチーフ Δ_U の a_0 結合といい、 $\Delta_A \oplus a_0\Delta_U$ と表す。

$$[\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U]$$



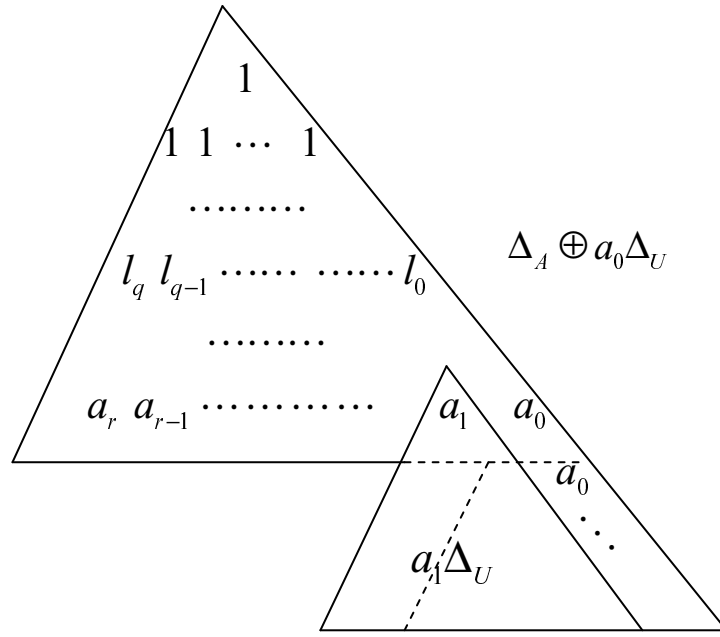
ここで、 $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U$ の u_0 結合の $A+L$ 段目は、 Δ_A の L 段目の a_0 倍であるが、これは L 段目を係数にもつ x の多項式

$$l_q x^q + l_{q-1} x^{q-1} + \dots + l_0$$

を a_0 倍した多項式の係数である。

ステップ 2) ステップ 1 で得られた $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U$ を考え、 A 段目の右端より一つ左の数 a_1 と $a_1 \Delta_U$ の 0 段の数 a_1 を重ねて張り合わせる、ただし、 $A+1$ 以下の段で $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U$ と重なった数字は足し合わせる。この操作を、 Δ_A に対するモチーフ Δ_U の $(a_1 a_0)$ 結合といい、記号で $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U \oplus a_1 \Delta_U$ と書く。

$$[\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U \oplus a_1 \Delta_U]$$



ここで、 $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U \oplus a_1 \Delta_U$ の $A+L$ 段目は、 L 段目を係数にもつ x の多項式

$$l_q x^q + l_{q-1} x^{q-1} + \dots + l_0$$

を $a_1 x + a_0$ 倍した多項式の係数である。したがって、 $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U \oplus a_1 \Delta_U$ は、

「多項式 $l_q x^q + l_{q-1} x^{q-1} + \dots + l_0$ と $a_1 x + a_0$ の筆算を行う過程」

を意味する。

ステップ 3) ステップ 2 を一般化して、 $\Delta_A \oplus a_0 \Delta_U \oplus a_1 \Delta_U \oplus \dots \oplus a_r \Delta_U$ が得られる。これを単に Δ_A の Δ_U 結合といい、記号で $\Delta_A \oplus \Delta_U$ と書く。これまでのことから、 $\Delta_A \oplus \Delta_U$ は、

「多項式 $l_q x^q + l_{q-1} x^{q-1} + \dots + l_0$ と $a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0$

の筆算を行う過程」

を意味する。

さらに、

$$(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1)^L = l_q x^q + l_{q-1} x^{q-1} + \cdots + l_0,$$

$$(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1)^A = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_0$$

に注意すると、 $A+L$ 段目は、 $(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + 1)^{A+L}$ の係数が並ぶ。これより、

「 $A+L$ 段目は、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の $A+L$ 段目と一致する」

のである。

以上のことを、次の命題 3 としてまとめる。

命題 3 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の 0 段から U 段目までで作られる三角形 Δ_U を考え、それをモチーフとする。さらに 0 段から A 段目 ($U \leq A$) までで作られる三角形 Δ_A を考え、このとき、 Δ_A の Δ_U 結合 $\Delta_A \oplus \Delta_U$ によって、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の $A+U$ 段目までが得られる。

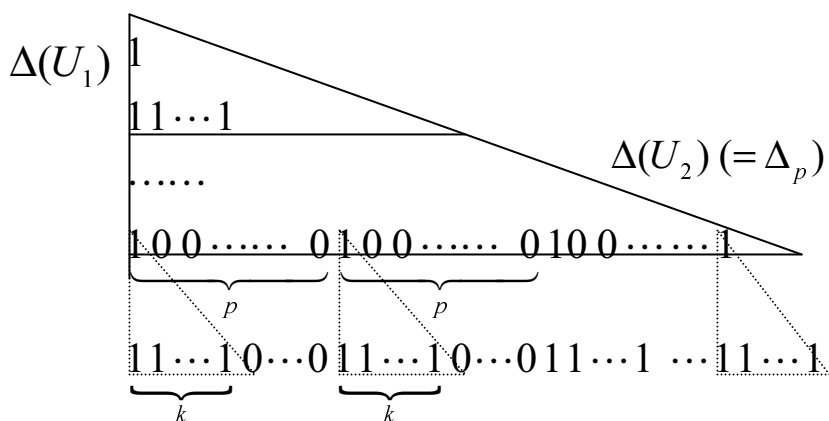
さらに、 $\Delta_A \oplus \Delta_U$ の Δ_U 結合 $(\Delta_A \oplus \Delta_U) \oplus \Delta_U$ により、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の $A+2U$ 段目までが得られる。

この操作を無限回繰り返すことで、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ が得られる。

命題 3 の方法で k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ を構成することを、 Δ_A から Δ_U をモチーフとして k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ を構成する、という。

【定理 1 の証明】

(1) $k \leq p$ の場合。 まず, 1 次の自己相似性を持つことを示す。命題 1 によって, k - パスカル三角形 $(\text{mod } p)$ には, 第 1 種単位三角形 $\Delta(U_1) (= \Delta_1)$ と p 段目までの三角形 Δ_p が存在する。命題 3 より, Δ_p から $\Delta(U_1)$ をモチーフとして k - パスカル三角形 $(\text{mod } p)$ を構成できるので, $\Delta_p \oplus \Delta(U_1)$ に着目する。そして $\Delta_p \oplus \Delta(U_1)$ に含まれる第 1 種単位三角形 $\Delta(U_1)$ の大きさが k であることに注意する。命題 2 によって p 段は 1 段目の $O(p-1)$ - 拡大である。1 段目の数列は $\underbrace{11 \cdots 1}_k$ であり, それに対応する p 段目の数列を $\underbrace{10 \cdots 0}_{p-1} \underbrace{10 \cdots 01}_{p-1} \cdots \underbrace{0 \cdots 01}_{p-1}$ とすると, Δ_p の 0 倍は無視でき, $k \leq p$ なので, $\Delta_p \oplus \Delta(U_1)$ の中の p 以下の段において, 第 1 種単位三角形 $\Delta(U_1)$ どうしは, それらの間隔を $p-k$ として互いに交わらない。



同様に $\Delta_{2p} \oplus \Delta(U_1)$ に着目する。命題 2 により $2p$ 段目も 1 段目の $O(p-1)$ - 拡大である。2 段目の数列 $12 \cdots 21$ に対応する $2p$ 段目の数列を $1 \underbrace{0 \cdots 0}_{p-1} 2 \underbrace{0 \cdots 0}_{p-1} \cdots 2 \underbrace{0 \cdots 0}_{p-1} 1$ を考えると, $\Delta_{2p} \oplus \Delta(U_1)$ の $2p$ 以下の段において,

第1種単位三角形の a_i 倍の三角形 $a_i\Delta(U_1)$ oughしは、上と同様の理由で、それらの間隔を $p-k$ として互いに交わらない。

$\Delta_{ap} \oplus \Delta(U_1)$ ($a \geq 3$)に着目する。1段目の $O(p-1)$ -拡大である ap 段目を考え、 a 段目の数列を $a_r a_{r-1} a_{r-2} \cdots a_0$ として、それに対応する ap 段目の数列を $a_r \underbrace{0 \cdots 0}_{p-1} a_{r-1} \underbrace{0 \cdots 0}_{p-1} a_{r-2} \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{p-1} a_0$ とすると、同様の議論により、 $\Delta_{ap} \oplus \Delta(U_1)$ の ap 以下の段において、第1種単位三角形の a_i 倍の三角形 $a_i\Delta(U_1)$ oughしは、上と同様の理由で、それらの間隔を $p-k$ として互いに交わらない。さらに縦の間隔が $p-2$ であることは明らかである。

よって k -パスカル三角形 (mod p)は1次の自己相似性を持ち、自己相似性をつくる間隔は $(p-2, p-k)$ である。

(2) $p^{t-1} < k \leq p^t$ ($t = 2, 3, \dots$)の場合。命題1によって、 k -パスカル三角形 (mod p)にもやはり第1種単位三角形 $\Delta(U_1) (= \Delta_1)$ と p^t 段目までの三角形 Δ_{p^t} が存在する。命題3より、0段から p^t 段目までで作られる三角形 Δ_{p^t} から $\Delta(U_t)$ をモチーフとして k -パスカル三角形 (mod p)を構成できる。

$\Delta_{ap^t} \oplus \Delta(U_1)$ に着目する。命題2により、 ap^t 段目 ($a = 1, 2, \dots$)は a 段目の $O(p^t-1)$ -拡大である。 a 段目の数列を $a_r a_{r-1} a_{r-2} \cdots a_0$ として、それに対応する ap^t 段目の数列を $a_r \underbrace{0 \cdots 0}_{p^t-1} a_{r-1} \underbrace{0 \cdots 0}_{p^t-1} a_{r-2} \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{p^t-1} a_0$ とし、 $\Delta_{ap^t} \oplus \Delta(U_t)$ に含

まれる ap^t 以下の段の $a_i\Delta(U_1)$ に着目すると、その大きさは k である。 $k \leq p^t$ なので、 k -パスカル三角形 (mod p)を構成するときに、 $a_i\Delta(U_1)$ oughしはそれ

らの間隔を $p^t - k$ として互いに交わらない。

同様にして $\Delta_{ap^t} \oplus \Delta(U_1)$ ($a \geq 2$) に着目する。1段目の $O(p^t - 1)$ - 拡大である ap^t 段目を考え、 a 段目の数列を $a_r a_{r-1} a_{r-2} \cdots a_0$ として、それに対応する ap^t 段目の数列を $a_r \underbrace{0 \cdots 0}_{p^t-1} a_{r-1} \underbrace{0 \cdots 0}_{p^t-1} a_{r-2} \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{p^t-1} a_0$ とすると、同様の議論により、 $\Delta_{ap^t} \oplus \Delta(U_1)$ の ap^t 以下の段において、 $a_i \Delta(U_1)$ どうしは、上と同様の理由で、それらの間隔を $p^t - k$ として互いに交わらない。さらに縦の間隔が $p^t - 2$ であることは明らかである。

よって k - パスカル三角形 $(\text{mod } p)$ は1次の自己相似性を持ち、自己相似性をつくる間隔は $(p^t - 2, p^t - k)$ である。

(定理 1 の証明終)

定義 7 (n 次の自己相似形)

主定理から、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の1次の自己相似形が得られた。そして、1次の自己相似形もまた k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ なので、その1次の自己相似形を考えることができる。これを k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の2次の自己相似形と呼ぶ。これを n 回繰り返して、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の n 回目の自己相似形を得るが、これを k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の n 次の自己相似形という。

さらに、 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の n 次の自己相似形において、その第1種単位三角形を $\Delta^n(U_1)$ と書く。

定義 8 (第 n 種単位三角形)

k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の 1 次の自己相似形の中の第 1 種単位三角形 $\Delta^1(U_1)$ は, k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の中の 0 段から k 個の $\Delta(U_1)$ が最初に現れる段までの三角形に対応する。これを第 2 種単位三角形といい, $\Delta(U_n)$ と書く。さらに, k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の 2 次の自己相似形の中の $\Delta^2(U_1)$ は, k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の中の 0 段から k 個の $\Delta(U_2)$ が最初に現れる段までの三角形に対応する。これを第 3 種単位三角形といい, $\Delta(U_3)$ と書く。

以下, 帰納的に, k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の $n-1$ 次の自己相似形の中の $\Delta^{n-1}(U_1)$ は, k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の中の 0 段から k 個の $\Delta(U_{n-1})$ が最初に現れる段までの三角形に対応する。これを第 n 種単位三角形といい, $\Delta(U_n)$ と書く。

さらに, $\Delta(U_n)$ のすべての成分を α 倍した三角形を $\alpha \Delta(U_n)$ と書き, α を $\Delta(U_n)$ の係数という。

k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の n 次の自己相似形と, k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の中の $\Delta(U_n)$ との対応関係と, 主定理の証明と同様な議論を行うことで, 次の定理 2 が得られる。

定理 2 k - パスカル三角形 $(\text{mod } m)$ の n 次の自己相似形は, 第 n 種単位三角形 $\Delta(U_n)$ のすべての係数から得られる。そして, $p^{t-1} < k \leq p^t$ ($t=1, 2, \dots$) のとき, 自己相似をつくる間隔は, $(p^{nt} - 2, p^{nt} - k)$ である。