

研究レポート

素数 p に関する第 k 種完全数の研究

今井 琥太郎（代表），久保 日椰太

（津山工業高等専門学校 1 年）

研究・実験・データ収集などの期間：2025 年 4 月 20 日～2025 年 9 月 26 日

1. はじめに（研究の動機）

本研究は、2016 年から 2018 年までの桐山翔伍（津山高専数学クラブ）の完全数に関する研究[K1],[K2]と、そこに提示された桐山の予想に興味をもったことから始まった。 a を自然数、 $\tau(a)$ を a の真の約数の和としたとき、 $a = \tau(a)$ を満たすような a を**完全数**という。例えば、6の真の約数は1,2,3であるため $\tau(6) = 1 + 2 + 3 = 6$ となり、6は完全数である。そして、 n を自然数、 $M_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ が素数のとき、「偶数の完全数は $a = 2^{n-1} \cdot M_n$ というものに限る」というユークリッド・オイラーの定理というものがある。ここで、 M_n は**メルセンヌ素数**と呼ばれる。

桐山の研究の興味深い点は、完全数を一般化して研究を行ったことにある。桐山は、 $a = 2^{p-1} \cdot M_n$ を2を基礎とする完全数と呼び、メルセンヌ素数 $M_n = 2^{n+1} - 1$ の代わりに、新たに ${}^pM_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$ が素数となるものを考え、これを **p メルセンヌ素数**と呼んだ。そして、 $a = (p-1)\tau(a) - (p-2){}^pM_n$ を満たすものを、 **pM_n 完全数**と呼んで、完全数を一般化した。特に、桐山は、 q を素数としたとき、「 p の倍数となる pM_n 完全数は、 $p^{a-1}q$ というものに限るだろう」と予想している。完全数の研究は、近年、飯高[I1],[I2]などにより盛んに行われているが、桐山の予想に関する研究は、私たちが調べる限り行われていない。したがって、この予想が証明できれば、これは、ユークリッド・オイラーの定理に匹敵する成果をあげられると思い、この予想に取り組むことにした。

この目的のために、私たちは、 $\tau(a)$ を用いた pM_n 完全数の桐山の定義を、約数関数 $\sigma(a)$ を用いて、再度見直し、より拡張できるような定義を考えた。このことから、 pM_n 完全数をも拡張させた**第 k 種 pM_n 完全数**というものを定義することに成功した。さらに、第 k 種 pM_n 完全数の中心的役割を果たす第 k 種KI型 pM_n 完全数というものを発見した。これにより、桐山の予想を、私たちはより具体的に「 p の倍数となる pM_n 完全数は、KI型 pM_n 完全数に限るだろう」とすることができた。しかし残念ながら、条件付きの定理という形での証明に終わった。一方、別な大きな成果を得ることもできた。それは、奇数の完全数に対応する p の倍数でない pM_n 完全数を研究する中で、双子素数に関する p の倍数でない第 k 種 pM_n 完全数を発見し、その特徴付けにも成功したことである。以下、これらのことを、詳細に報告する。

2. 桐山が提示した派生数

$2 \times 3^0 = 2$, $2 \times 3^1 = 6$, $2 \times 3^2 = 18$, ...といった 2×3^k という数には、その約数に以下のような構造がある。

$$\underbrace{1 \quad 2}_3 \mid \underbrace{3 \quad 6}_{3^2} \mid \underbrace{9 \quad 18}_{3^3} \mid \underbrace{27 \quad 54}_{3^4} \mid \underbrace{81 \quad 162}_{3^5} \mid \underbrace{243 \quad 486}_{3^6}$$

つまり、 2×3^n の約数を小さい方から並べて、それを2個ずつに分割して足すと、最初の分割和は $1+2=3$ という素数となり、以後、分割和は $3^2, 3^3, \dots, 3^k$ という数列として並ぶ。特に $3 \times 2 = 6$ は完全数である。

同様に、 $2^2 \times 7^k$ の数について、その約数の構造を調べると、下の図のように約数を3つずつに区切りそれら3つの数をそれぞれ足してみると、最初の分割和は $1+2+2^2=7$ という素数となり、以後、分割和は $7^2, 7^3, \dots, 7^k$ という数列として並ぶ。特に、 $7 \times 2^2 = 28$ は完全数である。

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 4}_7 \mid \underbrace{7 \quad 14 \quad 28}_{7^2} \mid \underbrace{49 \quad 98 \quad 196}_{7^3} \mid \underbrace{343 \quad 686 \quad 1372}_{7^4}$$

さらに、 $3^2 \times 13^k$ の数について、その約数の構造を調べると、下の図のように約数を3つずつに区切りそれら3つの数をそれぞれ足してみると、最初の分割和は $1 + 3 + 3^2 = 13$ という素数となり、以後、分割和は $13^2, 13^3, \dots, 13^k$ という数列が並ぶ。特に $13 \times 3^2 = 117$ は桐山の 3M_3 完全数である。

$$\underbrace{1 \quad 3 \quad 9}_{13} \quad \bigg| \quad \underbrace{13 \quad 39 \quad 117}_{13^2} \quad \bigg| \quad \underbrace{169 \quad 507 \quad 1521}_{13^3}$$

一般に、素数 p と pM_n に関して $p^k \cdot {}^pM_n$ は全て上で説明したものと同じ約数の構造を持っている。桐山は、 $k \geq 1$ のとき $2 \times 3^k, 2^2 \times 7^k, 3^2 \times 13^k$ などを派生数と呼んで研究を行った[K1]。しかし、私たちは、桐山が呼んだ派生数 $p^k \cdot {}^pM_n$ は、完全数と同じ構造をもつ数ではないかと考え、この考えを押し進めていこうと考えた。第6節の定理5がこのことに関係する研究結果である。

3. p メルセンヌ素数 pM_n と pM_n 完全数について

私たちは、まず、桐山の完全数を、私たちが扱いやすい定義に変える作業を行った。

(1) まず、改めて p メルセンヌ素数の定義を確認する。

定義1 p を素数とする。

$${}^pM_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

が素数となるとき、 pM_n を **p メルセンヌ素数**と呼ぶ。

$p = 2$ のとき、2メルセンヌ素数 2M_n は、通常メルセンヌ素数 M_n である。

命題1 (p メルセンヌ素数の定理) pM_n を p メルセンヌ素数とすると n は素数である。

(証明) 対偶で示すために、 n は素数でないと仮定し、 $n = ab$ ($1 < a, b < n$)と置く。

$$\begin{aligned} {}^pM_n &= {}^pM_{ab} = 1 + p + p^2 + \dots + p^{ab-1} \\ &= (1 + p + p^2 + \dots + p^{a-1}) + (p^a + p^{a+1} + \dots + p^{2a-1}) + \dots + (p^{(b-1)a} + p^{(b-1)a+1} + \dots + p^{ab-1}) \\ &= (1 + p + p^2 + \dots + p^{a-1})(1 + p^a + p^{2a} + \dots + p^{(b-1)a}) \end{aligned}$$

したがって、 pM_n は素数ではない。Q.E.D.

(2) 新しい完全数の定義を考える上で、自然数 a の正の約数の総和である**約数関数** $\sigma(a)$ と呼ばれるものが重要である。 $\sigma(a)$ の特に重要な性質として、以下のことが知られている。

命題2 (約数関数 $\sigma(a)$ の性質) a, b を互いに素、 p を素数とすると、以下が成り立つ。

$$\sigma(a^n b^m) = \sigma(a^n) \sigma(b^m), \quad \sigma(p^{n-1}) = 1 + p + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1} = {}^pM_n$$

(3) 桐山の pM_n 完全数の定義を拡張させるために、以下のように定義を書き換えた。

定義 2 pM_n を p メルセンヌ素数とする. 自然数 a が

$$pa = (p-1)\sigma(a) - (p-2) {}^pM_n$$

を満たすとき, a を pM_n 完全数と呼ぶ.

$p=2$ のとき, $2a = \sigma(a)$ となる. これは a の正の約数の和 $\sigma(a)$ が $2a$ に等しいという式であり, ユークリッド学派が定義した完全数の式である. そして, ${}^2M_n = 2^{n+1} - 1$ を素数とすると, $a = 2^{n-1} \cdot {}^2M_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ は,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{n-1})\sigma(2^n - 1) = (2^n - 1) \cdot 2^n = 2a$$

となるため, $a = 2^n \cdot {}^2M_n$ は 2M_n 完全数となり, さらに, 「偶数の完全数は $2^n \cdot {}^2M_n$ というものに限る」ことが, オイラーによって証明された (ユークリッド・オイラーの定理) [T1].

$p=3$ のとき, $3a = 2\sigma(a) - {}^3M_n$ となる. $a = {}^3M_n \times 3^2$ の正の約数の和 $\sigma(a)$ が, $2a$ に等しいという式である, 例えば, ${}^3M_3 = (3^3 - 1)/2 = 13$ (素数) に対して, $a = 3^2 \times {}^3M_3 = 117$ を考えると,

$$\sigma(117) = \sigma(9 \times 13) = \sigma(9) \cdot \sigma(13) = 13 \times 14 = 182$$

なので,

$$2\sigma(117) - {}^3M_3 = 2 \times 182 - 13 = 351 = 3 \times 117$$

となるため, $a = 117$ は 3M_3 完全数となる.

私たちの第 1 の研究結果は, 以下である.

定理 1 (主結果 1). pM_n を p メルセンヌ素数とすると, $a = p^{n-1} \cdot {}^pM_n$ は pM_n 完全数である.

(証明) $\sigma(p^{n-1})$ と $\sigma({}^pM_n)$ をそれぞれ計算すると,

$$\sigma(p^{n-1}) = \frac{p^n - 1}{p - 1} = {}^pM_n, \quad \sigma({}^pM_n) = 1 + {}^pM_n$$

である. よって,

$$\sigma(a) = \sigma(p^{n-1} \cdot {}^pM_n) = \sigma(p^{n-1}) \cdot \sigma({}^pM_n) = {}^pM_n \cdot (1 + {}^pM_n) = {}^pM_n + ({}^pM_n)^2$$

したがって,

$$\begin{aligned} (p-1)\sigma(a) - (p-2) {}^pM_n &= (p-1) \{ {}^pM_n + ({}^pM_n)^2 \} - (p-2) {}^pM_n \\ &= {}^pM_n + (p-1)({}^pM_n)^2 = {}^pM_n + \{(p-1) {}^pM_n\} {}^pM_n = {}^pM_n + (p^n - 1) {}^pM_n \\ &= p^n \cdot {}^pM_n \end{aligned}$$

ゆえに, $a = p^{n-1} \cdot {}^pM_n$ は素数 p と pM_n に関する完全数の定義である

$$pa = (p-1)\sigma(a) - (p-2) {}^pM_n$$

を満たしている. Q.E.D.

定義 3 p メルセンヌ素数 pM_n に対し, $a = p^{n-1} \cdot {}^pM_n$ をユークリッド pM_n 完全数とよぶ.

私たちは、桐山の予想を証明するために、ユークリッド pM_n 完全数以外の完全数を研究することに挑んだ。より具体的には、 q を素数とし、 $a = p^{\alpha-1}q$ なる pM_n 完全数の構造を詳細に研究した。次の節でこの研究について述べる。

4. p メルセンヌ KI 素数 $q(\alpha)$ と KI 型 pM_n 完全数について

素数 p 上のユークリッド完全数以外の研究をしていく過程で、ユークリッド pM_n 完全数とは異なる p の倍数の pM_n 完全数を発見した。例を以下に列挙する。

(1) $p = 3$, ${}^3M_3 = 13$ のときの 3M_3 完全数 a のリスト

$$3^3 \times 67, \quad 3^4 \times 229, \quad 3^7 \times 6547, \quad 3^{16} \times 129140149, \quad 3^{18} \times 1162261453$$

(2) $p = 3$, ${}^3M_7 = 1093$ のときの 3M_7 完全数 a のリスト

$$3^{10} \times 176053, \quad 3^{16} \times 129139069$$

(5) $p = 5$, ${}^5M_3 = 31$ のときの 5M_3 完全数 a のリスト

$$5^6 \times 78031, 5^6 \times 19531$$

$a = p^\alpha q(\alpha)$ とすると、上の例の $q(\alpha)$ はすべて素数である。これらのデータから新たな素数を定義した。

定義 4 (p メルセンヌ KI 素数) p を素数、 pM_n を p メルセンヌ素数とする。ある自然数 $\alpha > 1$ に対して

$$q(\alpha) = p^\alpha - 1 - (p-2) {}^pM_n$$

が素数となるとき、 $q(\alpha)$ を p メルセンヌ KI 素数という。特に、 $\alpha = n$ のときは、

$$q(n) = p^n - 1 - (p-2) {}^pM_n = {}^pM_n$$

なので、 $q(n)$ は p メルセンヌ素数である。

定義 4 により、 p メルセンヌ KI 素数（発見者のイニシャルから指導教員が命名した）はメルセンヌ素数を拡張したものとなり、 p メルセンヌ KI 素数から得られる pM_n 完全数の研究が重要になることがわかる。そして以下の重要な結果を証明した。

定理 2 (主結果 2). p を素数、 $q(\alpha)$ を p メルセンヌ KI 素数、 $\alpha > 1$ とする。このとき、 $a = p^{\alpha-1}q(\alpha)$ は、 pM_n 完全数である。

(証明) $q = q(\alpha)$ とする。 $a = p^{\alpha-1}q$ とすると、

$$a = p^{\alpha-1}q = p^{\alpha-1}\{p^\alpha - 1 + (p-2) {}^pM_n\}$$

$$\sigma(a) = \sigma(p^{\alpha-1}q) = \sigma(p^{\alpha-1})\sigma(q) = \frac{(p^\alpha - 1)(q + 1)}{p - 1} = \frac{(p^\alpha - 1)}{p - 1} \{p^\alpha - (p-2) {}^pM_n\}$$

である。 pM_n 完全数（定義 2）であることをチェックすると、

$$\begin{aligned} (p-1)\sigma(a) - (p-2) {}^pM_n &= (p^\alpha - 1)\{p^\alpha - (p-2) {}^pM_n\} - (p-2) {}^pM_n \\ &= (p^\alpha - 1)p^\alpha - (p^\alpha - 1)(p-2) {}^pM_n - (p-2) {}^pM_n = (p^\alpha - 1)p^\alpha - p^\alpha(p-2) {}^pM_n \\ &= p \cdot p^{\alpha-1}\{p^\alpha - 1 - (p-2) {}^pM_n\} = pa \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a = p^{\alpha-1}q(\alpha)$ は、 pM_n 完全数である。Q.E.D.

定義5. p メルセンヌ KI 素数 $q(\alpha)$ に対し, $a = p^{\alpha-1} \cdot q(\alpha)$ を **KI 型 pM_n 完全数**とよぶ.

さて, $p = 2$ のとき, ユークリッド・オイラーの定理は, 「偶数 (2の倍数) の完全数は $a = 2^{n-1} \cdot {}^2M_n$ というものに限る」というものであった. 我々は, これを KI 型 pM_n 完全数の形で一般化したい.

$p \geq 3$ とし, a を p の倍数である pM_n 完全数とする. すなわち, $a = p^{\alpha-1}b$, $\alpha > 1$, $\gcd(p, b) = 1$ と置く. 命題2より

$$(p-1)\sigma(a) = (p-1)\sigma(p^{\alpha-1})\sigma(b) = (p-1) {}^pM_{\alpha}\sigma(b) = (p^{\alpha}-1)\sigma(b) \quad (4.1)$$

となる. 一方, 定義2より

$$(p-1)\sigma(a) = pa + (p-2) {}^pM_n = p^{\alpha}b + (p-2) {}^pM_n \quad (4.2)$$

である. (4.1)と(4.2)より

$$(p^{\alpha}-1)\sigma(b) = p^{\alpha}b + (p-2) {}^pM_n \quad (4.3)$$

を得る. よって,

$${}^pM_n = \frac{(p^{\alpha}-1)\sigma(b) - p^{\alpha}b}{p-2} \quad (4.4)$$

を得る. これは, (4.4)の右辺が素数であることを意味する.

命題3 $p \geq 3$ を素数, b は素数で, $a = p^{\alpha-1}b$ は pM_n 完全数とする. このとき $p-2$ が $p^{\alpha}-b-1$ の約数ならば, ${}^pM_n = \frac{p^{\alpha}-b-1}{p-2}$ である. また, $b = {}^pM_{\alpha}$ ならば $\alpha = n$ である.

(証明) b は素数なので, $\sigma(b) = 1+b$ であり, (4.4)は

$${}^pM_n = \frac{(p^{\alpha}-1)\sigma(b) - p^{\alpha}b}{p-2} = \frac{(p^{\alpha}-1)(1+b) - p^{\alpha}b}{p-2} = \frac{p^{\alpha}-b-1}{p-2} \quad (4.5)$$

となる. また, $b = {}^pM_{\alpha}$ と置くと, $p^{\alpha}-1 = (p-1)b$ であり, (4.5)より

$${}^pM_n = \frac{p^{\alpha}-1-b}{p-2} = \frac{(p-1)b-b}{p-2} = b$$

となる. Q.E.D.

命題4 $p \geq 3$ を素数, $a = p^{\alpha-1}b$ は pM_n 完全数, $\tau(b) = \sigma(b) - b$ とする. このとき

$$b = \tau(b)(p^{\alpha}-1) - (p-2) {}^pM_n \quad (4.6)$$

で, b は奇数となる. 特に, p が素数なら p は p メルセンヌ KI 素数である.

(証明) (4.3)を変形すると,

$$\sigma(b) = b + \frac{b + (p-2) {}^pM_n}{p^{\alpha}-1} \quad (4.7)$$

となる. $\{b + (p-2) {}^pM_n\}/(p^{\alpha}-1)$ は整数で, これは, b の真の約数の総和 $\tau(b) = \sigma(b) - b$ に一致する. したがって,

$$b = \tau(b)(p^{\alpha}-1) - (p-2) {}^pM_n$$

を得る. また, pM_n は奇素数であることから, b は奇数となる. Q.E.D.

命題5 $p \geq 3$ を素数, $\alpha > 1$ は自然数, $a = p^{n-1}b$ は pM_n 完全数とする. このとき, b は素数である.

(証明) b は合成数であると仮定して, 背理法で示す. (4.6)で $\alpha = n$ とすると,

$$\begin{aligned} b &= \tau(b)(p^n - 1) - (p - 2) {}^pM_n = \tau(b)(p - 1) {}^pM_n - (p - 2) {}^pM_n \\ &= \{\tau(b)(p - 1) - (p - 2)\} {}^pM_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

である. つまり, b は, c を自然数として, $b = c {}^pM_n$ (ただし, $c > 1, \gcd(c, {}^pM_n) = 1$) と書ける.

(4.8)より,

$$c + (p - 2) = \tau(c {}^pM_n)(p - 1) \quad (4.9)$$

となる. 命題2より, $\sigma(c {}^pM_n) = \sigma(c)\sigma({}^pM_n) = \sigma(c)({}^pM_n + 1)$ なので,

$$\begin{aligned} \tau(c {}^pM_n) &= \sigma(c {}^pM_n) - c {}^pM_n = \sigma(c)({}^pM_n + 1) - c {}^pM_n = \sigma(c) {}^pM_n + \sigma(c) - c {}^pM_n \\ &= \{\tau(c) + c\} {}^pM_n + \sigma(c) - c {}^pM_n = \tau(c) {}^pM_n + \sigma(c) \end{aligned}$$

である. したがって, (4.9)より

$$c + (p - 2) = \{\tau(c) {}^pM_n + \sigma(c)\}(p - 1) \quad (4.10)$$

となる. さらに変形して,

$$c + (p - 2) = \tau(c) {}^pM_n(p - 1) + (\tau(c) + c)(p - 1)$$

となる. よって,

$$\tau(c)({}^pM_n + 1)(p - 1) + (c - 1)(p - 2) = 0 \quad (4.11)$$

しかし, $p > 2, c > 1$ より, 式(4.11)の左辺は正であり, (4.11)は成り立たない. Q.E.D.

次に, $\alpha > n$ である場合にある条件を加えたとき, b は素数しか起こらないことを見ていく. まず, 次の補題を示す.

補題1 b を合成数とし, $d > 2$ を b の最小な素因数, q を b でない b の最大な約数とすると $d^2 \leq b \leq q^2$ が成り立つ.

(証明) まず $q = b/d$ である. $d \leq q$ より $d^2 \leq dq = b$ となる. よって, $(b/q)^2 \leq b$ より $b \leq q^2$ が成り立つ.

Q.E.D.

命題6 $p \geq 3$ を素数, $\alpha > n \geq 2$, さらに, $a = p^{\alpha-1}b$ は pM_n 完全数で $b < p^{2\alpha-2}$ とする. このとき b は $p^{\alpha-1} < b < p^{2\alpha-2}$ を満たす素数である.

(証明) (Step 1) まず, $p^{\alpha-1} > b$ となる b は存在しないことを示す. b が存在するならば, 命題4と $\alpha > n$ より

$$\tau(b) = \frac{b + (p - 2) {}^pM_n}{p^\alpha - 1} < \frac{p^{\alpha-1} + (p - 2) {}^pM_n}{p^\alpha - 1} = \frac{p^{\alpha-1} + p^n - 1 - {}^pM_n}{p^\alpha - 1} \leq \frac{2p^{\alpha-1}}{p^\alpha - 1} < 1$$

であるが, これはあり得ない.

(Step 2) k を自然数として $p^{\alpha-1} \leq b < p^{\alpha-1+k}$ と考える. 仮定 $b < p^{2\alpha-2}$ より $k \leq \alpha - 1$ である. これより, $k \leq \alpha - 1$ を満たす自然数 k について $p^{\alpha-1} \leq b < p^{\alpha-1+k}$ ならば b は素数となることを, k に関する数学的帰納法で示す.

$k = 1$ のとき $p^{\alpha-1} \leq b < p^\alpha$ であり, b は合成数であるとする. 命題4より

$$\tau(b) < \frac{p^\alpha + (p-2)^p M_n}{p^\alpha - 1}$$

である。 $p^n - 1 = (p-1)^p M_n$ と $\alpha > n$ より

$$\tau(b) \leq \frac{p^\alpha + p^n - 1 - {}^p M_n}{p^\alpha - 1} < \frac{p^\alpha + p^{\alpha-1}}{p^\alpha - 1} < 2$$

である。 よって、 $\tau(b) = 1$ 。 これは b が合成数であることに矛盾する。 したがって、 b は素数である。

(Step 3) $k = u \geq 1$ まで命題は正しいとする。 すなわち、 $p^{\alpha-1} \leq b < p^{\alpha-1+u}$ ならば b は素数であることを仮定する。 $k = u+1$ のとき $p^{\alpha-1} \leq b < p^{\alpha+u}$ であり、 b は合成数であるとする。 帰納法の仮定と b は合成数であることから、 $p^{\alpha-1+u} \leq b < p^{\alpha+u}$ としてよい。 一方、 命題 4 と $\alpha > n$ より

$$0 < \tau(b) < \frac{p^{\alpha+u} + p^n - 1 - {}^p M_n}{p^\alpha - 1} < \frac{p^{\alpha+u} + p^{\alpha-1}}{p^\alpha - 1} < p^u + 1$$

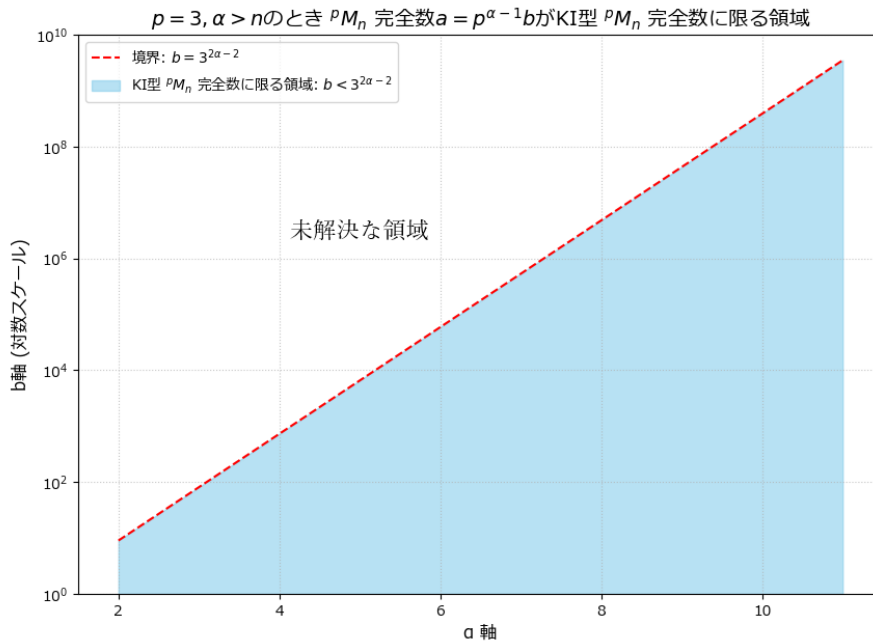
を得る。 b は合成数で、 b でない b の最大な約数 q は奇数なので、 $2 < q < p^u$ である。 よって、 補題 1 より $b < (p^u - 1)^2$ となる。 したがって、 $p^{\alpha-1+u} \leq b < (p^u - 1)^2$ である。 $0 < 2p^u - 1 < p^{2u} - p^{\alpha-1+u}$ より $2u > \alpha - 1 + u$ である。 これより $u+1 > \alpha$ を得る。 しかし、 仮定 $\alpha > u+1$ より $u+1 > \alpha$ は起こりえない。 よって、 b は素数である。

したがって、 $k \leq \alpha - 1$ を満たすすべての自然数 k について $p^{\alpha-1} \leq b < p^{\alpha-1+k}$ ならば b は素数である。

Q.E.D.

命題 5 と命題 6 より以下の結果を得た。

定理 3 (主結果 3) $p \geq 3$ を素数、 α, n は自然数で $\alpha \geq n$ 、 さらに $b < p^{2\alpha-2}$ とする。 このとき、 ${}^p M_n$ 完全数 $a = p^{\alpha-1}b$ は KI 型 ${}^p M_n$ 完全数に限る。



5. ブニャコフスキー pM_n 完全数について

これまで、ユークリッド完全数を拡張した KI 型 pM_n 完全数を定義し、その性質を研究してきた。KI 型 pM_n 完全数はすべて p の倍数であるが、桐山の研究から p の倍数でない pM_n 完全数は存在している。

定義 6. p の倍数でない pM_n 完全数をブニャコフスキー pM_n 完全数とよぶ。

ブニャコフスキーは、ウクライナの数学者で、素数の研究者として有名である。素数に関するブニャコフスキー予想は双子素数に深く関係することが知られている。

(例) $3^2 \times 8363$ はブニャコフスキー 5M_7 完全数, $13 \times 827119084231045049552217497423516152933$ はブニャコフスキー ${}^5M_{31}$ 完全数である。

ブニャコフスキー pM_n 完全数 a を研究して、 $a = pr$ で q, r は p とは異なる素数という形のものがほとんどであることに気がついた。

命題 7. $p \geq 3$ を素数, q, r を p と異なり $p \neq r$ である素数, $a = qr$ をブニャコフスキー pM_n 完全数とすると、以下が成り立つ。

$$(1 + q - p)r = (p - 1)(q + 1) - (p - 2) {}^pM_n$$

(証明) $\sigma(a) = \sigma(qr) = \sigma(q)\sigma(r) = (q + 1)(r + 1)$ であり、これを pM_n 完全数の定義式

$$pa = (p - 1)\sigma(a) - (p - 2) {}^pM_n$$

に代入することで得られる。Q.E.D.

命題 7 により、私たちは非常に多くのブニャコフスキー pM_n 完全数のデータをえることができた。特に、 $a = qr$ という形のブニャコフスキー pM_n 完全数で、 $q = p - 2$ であるものに興味を持った。

定理 4 (主結果 4) $p > 3$ を素数, (p, q) を双子素数で、 $q = p - 2$ とする。このとき、 $r = (p - 2) {}^pM_n - (p - 1)^2$ が素数であれば、 $a = qr$ はブニャコフスキー pM_n 完全数である。

(証明) $q = p - 2$ を命題 7 の式に代入することで得られる。Q.E.D.

定理 4 は、ブニャコフスキー pM_n 完全数 qr の中に双子素数 (p, q) に関するものが存在することを示している。実際、 $(p, n) = (193, 5), (3529, 41), (3673, 5), (3769, 19), (4093, 5)$ などから得られる双子素数 (p, q) に関する $a = qr$ は、ブニャコフスキー pM_n 完全数である。そして、私たちが考えた問題は、

「双子素数 (p, q) に関するブニャコフスキー pM_n 完全数 qr は、無限に存在するか？」

である、この問題については、定理 4 で見るように r が p に関する多項式であることから、もし「メルセンヌ素数は無限に存在する」という未解決問題と、「既約多項式から生成される素数が無限に存在するだろうという」ブニャコフスキー予想[B]が正しければ、肯定的に解決できることがわかる。

6. 第 k 種 pM_n 完全数について

定義 7 (第 k 種 p M完全数) p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数、 $k \geq 2$ とする. 自然数 a が,

$$pa = (p-1) \left\{ \sigma(a) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} {}^pM_n^j \right) \right\} - (p-2) {}^pM_n^k$$

を満たすとき、 a を第 k 種 pM_n 完全数という.

定理 5 (主結果 5) p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数、 $k \geq 2$ とする. このとき, $a = p^{n-1} {}^pM_n^k$ は, 第 k 種 pM_n 完全数である.

(証明) $a = p^{n-1} {}^pM_n^k$ とすると, a の約数は,

$$1, p, p^2, \dots, p^{n-1}, {}^pM_n, p {}^pM_n, \dots, p^{n-1} {}^pM_n, {}^pM_n^2, \dots, p^{n-1} {}^pM_n^k$$

で,

$${}^pM_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$$

なので, $\sigma(a) = {}^pM_n + {}^pM_n^2 + \dots + {}^pM_n^k + p {}^pM_n^{k+1}$ である. よって, 第 k 種 pM_n 完全数の定義の左辺は

$$pa = p^n {}^pM_n^k$$

であり, 右辺は

$$\begin{aligned} & (p-1) \{ \sigma(a) - ({}^pM_n + {}^pM_n^2 + \dots + {}^pM_n^{k-1}) \} - (p-2) {}^pM_n^k \\ &= (p-1) \{ {}^pM_n^k + {}^pM_n^{k+1} \} - (p-2) {}^pM_n^k = {}^pM_n^k + (p-1) {}^pM_n^{k+1} \\ &= {}^pM_n^k \{ 1 + (p-1) {}^pM_n \} = \{ 1 + (p-1)(p^{n-1} + \dots + p + 1) \} {}^pM_n^k \\ &= \{ 1 + (p^n - 1) \} {}^pM_n^k = p^n {}^pM_n^k \end{aligned}$$

である. したがって, $a = p^{n-1} {}^pM_n^k$ は, 第 k 種 pM_n 完全数である. Q.E.D.

$a = p^{n-1} {}^pM_n^k$ を第 k 種ユークリッド pM_n 完全数という. 第 2 節で取り上げた $2 \times 3^2 = 18$ は第2種ユークリッド 2M_2 完全数, $2 \times 3^3 = 54$ は第3種ユークリッド 2M_2 完全数である.

7. 第 k 種 p メルセンヌ KI 素数 $q_k(\alpha)$ と第 k 種 KI 完全数について

第 2 種 pM_n 完全数においても, p メルセンヌ KI 素数に対応する素数を発見した.

定義 8 (第 2 種 p メルセンヌ KI 素数) p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数とする. ある自然数 α に対して

$$q_2(\alpha) = p^\alpha - 1 - (p-1) {}^pM_n - (p-2) {}^pM_n^2$$

が素数となるとき, $q_2(\alpha)$ を第 2 種 p メルセンヌ KI 素数という.

例. $p = 3$, ${}^3M_3 = 13$ のとき, $q(4) = 47$ は, 第 2 種 3メルセンヌ KI 素数である.

$p = 3$, ${}^3M_7 = 1093$ のとき, $q(14) = 13152071$ は, 第 2 種 3メルセンヌ KI 素数である.

$p = 5$, ${}^5M_3 = 31$ のとき, $q(13) = 6103512617$ は, 第 2 種 5メルセンヌ KI 素数である.

命題 8 p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数, $q_2(\alpha)$ を第 2 種 p メルセンヌ KI 素数とする. このとき, $a = p^{\alpha-1}q_2(\alpha)$ は, 第 2 種 pM_n 完全数である.

(証明) $q = q_2(\alpha)$ とする. $a = p^\alpha q$ とすると,

$$a = p^{\alpha-1}q = p^\alpha \{p^\alpha - 1 - (p-1){}^pM_n - (p-2){}^pM_n^2\}$$

$$\sigma(a) = \frac{(p^\alpha - 1)(q + 1)}{p - 1} = \frac{(p^\alpha - 1)}{p - 1} \{p^\alpha - (p-1){}^pM_n - (p-2){}^pM_n^2\}$$

である. 第 2 種 pM_n 完全数の定義をチェックすると,

$$\begin{aligned} & (p-1)\{\sigma(a) - {}^pM_n\} - (p-2){}^pM_n^2 \\ &= (p^\alpha - 1)\{p^\alpha - (p-1){}^pM_n - (p-2){}^pM_n^2\} - (p-1){}^pM_n - (p-2){}^pM_n^2 \\ &= p^\alpha \{p^\alpha - 1 - (p-1){}^pM_n - (p-2){}^pM_n^2\} = pa \end{aligned}$$

となる. したがって, $a = p^{\alpha-1}q_2(\alpha)$ は, 第 2 種 pM_n 完全数である. Q.E.D.

第 2 種 p メルセンヌ KI 素数は, 第 k 種 p メルセンヌ KI 素数に, 一般化できることがわかった.

定義 9 (第 k 種 p メルセンヌ KI 素数) p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数とする. ある自然数 α に対して

$$q_k(\alpha) = p^\alpha - 1 - (p-1) \left(\sum_{j=1}^{k-1} {}^pM_n^j \right) - (p-2){}^pM_n^k$$

が素数となるとき, $q_k(\alpha)$ を第 k 種 p メルセンヌ KI 素数という.

定理 6 (主結果 6) p を素数, pM_n を p メルセンヌ素数, $q_k(\alpha)$ を第 k 種 p メルセンヌ KI 素数とする. このとき, $a = p^{\alpha-1}q_k(\alpha)$ は, 第 k 種 pM_n 完全数である.

(証明) $q = q_k(\alpha)$, $A = \sum_{j=1}^{k-1} {}^pM_n^j$ とする. $a = p^\alpha q$ とすると,

$$a = p^{\alpha-1}q = p^\alpha \{p^\alpha - 1 - (p-1)A - (p-2){}^pM_n^k\}$$

$$\sigma(a) = \frac{(p^\alpha - 1)(q + 1)}{p - 1} = \frac{(p^\alpha - 1)}{p - 1} \{p^\alpha - (p-1)A - (p-2){}^pM_n^k\}$$

である. 第 k 種 pM_n 完全数の定義をチェックすると,

$$\begin{aligned} & (p-1)\{\sigma(a) - A\} - (p-2){}^pM_n^k \\ &= (p^\alpha - 1)\{p^\alpha - (p-1)A - (p-2){}^pM_n^k\} - (p-1)A - (p-2){}^pM_n^k \\ &= p^\alpha \{p^\alpha - 1 - (p-1)A - (p-2){}^pM_n^k\} = pa \end{aligned}$$

となる. したがって, $a = p^{\alpha-1}q_k(\alpha)$ は, 第 k 種 pM_n 完全数である. Q.E.D.

8. 第 k 種ブニャコフスキー pM_n 完全数について

定義6で与えたブニャコフスキー pM_n 完全数に対して、私たちはこの第 k 種版の完全数を以下のように定義した.

定義10 p の倍数でない第 k 種 pM_n 完全数を第 k 種ブニャコフスキー pM_n 完全数とよぶ.

(例) ① 17×5036897 は、第2種ブニャコフスキー ${}^{41}M_3$ 完全数

② $13 \times 49138790418633380571060643922070133039$ は、第3種ブニャコフスキー ${}^{17}M_{11}$ 完全数

③ 双子素数 $(151, 149)$ に対して、

$149 \times 2981291074776802328859445763618074159287861464349135431$ は、第2種ブニャコフスキー ${}^{151}M_{13}$ 完全数

④ 双子素数 $(13, 11)$ に対して、 $11 \times 325844980320751$ は、第3種ブニャコフスキー pM_n 完全数

命題9 $p \geq 3$ を素数, q, r を $q \neq r$ で p と異なる素数, $a = qr$ を第 k 種ブニャコフスキー pM_n 完全数とすると、以下が成り立つ.

$$(1 + q - p)r = (p - 1)(q + 1) - (p - 1) \left(\sum_{j=1}^{k-1} {}^pM_n^j \right) - (p - 2) {}^pM_n^k$$

(証明) $\sigma(a) = \sigma(qr) = \sigma(q)\sigma(r) = (q + 1)(r + 1)$ であり、これを第 k 種完全数の定義式

$$pa = (p - 1) \left\{ \sigma(a) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} {}^pM_n^j \right) \right\} - (p - 2) {}^pM_n^k$$

に代入することで得られる. Q.E.D.

定理7 (主結果7) $p > 3$ を素数, (p, q) を双子素数で, $q = p - 2$ とする. このとき,

$$r = (p - 2) {}^pM_n^k + (p - 1) \left(\sum_{j=1}^{k-1} {}^pM_n^j \right) - (p - 1)^2$$

が素数であれば, $a = qr$ は第 k 種ブニャコフスキー pM_n 完全数である.

(証明) $q = p - 2$ を命題9の式に代入することで得られる. Q.E.D.

9. 本研究のまとめ

ユークリッド・オイラーの定理で述べられている完全数 a は、偶数の完全数に関するものであり、 $M_n = 2^n - 1$ が素数のとき、 $a = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ というタイプに限るというものである. ここで素数 $M_n = 2^n - 1$ はメルセンヌ素数と呼ばれている. 私たちは、桐山の研究と同様な立場に立ち、このタイプの完全数は素数2に関するメルセンヌ素数から得られる完全数と位置付け、より一般に、素数 p に関する p メルセンヌ素

数 ${}^pM_n = 1 + p + \cdots + p^{n-1}$ から得られる完全数を, pM_n 完全数と呼んで研究を始めた.

まず, $a = p^{n-1} \cdot {}^pM_n$ というタイプの完全数を発見し, これをユークリッド pM_n 完全数と名付けた. ユークリッド・オイラーの定理で扱われる偶数の完全数を古典的完全数と呼ぶならば, 古典的完全数はユークリッド pM_n 完全数に含まれるのである.

さらに研究を続けると, ユークリッド pM_n 完全数を含むような完全数のクラスを発見した. それは p メルセンヌ KI 素数 $q(\alpha) = p^\alpha - 1 - (p-2) {}^pM_n$ というものが関係する KI 型 pM_n 完全数と名付けた完全数 $a = p^{\alpha-1} \cdot q(\alpha)$ の集合であり, KI 型 pM_n 完全数は, $\alpha = n$ のときユークリッド pM_n 完全数となるのである. 定義から KI 型 pM_n 完全数は p の倍数である. そこで, p の倍数である pM_n 完全数は KI 型 pM_n 完全数に限るのか (ユークリッド・オイラーの定理の一般化) という定理の証明を試みた. しかし定理 3 で示したように条件付きの証明となり, 未解決として残った.

さて, 古典的完全数については奇数の完全数が存在するかという未解決問題がある. これに対して私たちは, p の倍数でない pM_n 完全数は存在するのかという問いを立て, 研究を行った. その結果, そのような完全数をブニャコフスキー pM_n 完全数と名付け調査した. そして, $p > 3$ のブニャコフスキー pM_n 完全数の中には, 双子素数から得られるものがあることを証明した.

以上の研究結果を図 1 (pM_n 完全数のベン図) に示す.

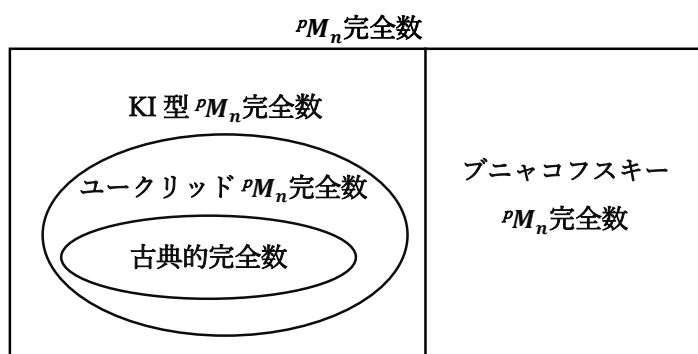


図 1 (pM_n 完全数のベン図)

さらに, 私たちは, pM_n 完全数を, 第 k 種 pM_n 完全数に拡張した. これに伴って, 第 k 種ユークリッド pM_n 完全数, 第 k 種 KI 型 pM_n 完全数, 第 k 種ブニャコフスキー pM_n 完全数も一般化し, これらも図 1 で示すものと全く同じ関係があることも証明した.

参考文献

- [I1] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう (I), 2016 年, 現代数学社
- [I2] 飯高茂, 数学の研究をはじめよう IX, 2024 年, 現代数学社
- [K1] 桐山翔伍, メルセンヌ素数とその派生数の一般化に関する研究, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 VOL23 No1(2017), pp.181-190
- [K2] 桐山翔伍, 素数 p を基礎にした完全数の研究, 2018 年,
https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/kiriyama_2018.pdf
- [T1] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版, (1971)
- [B] ブニャコフスキー予想, <https://ja.wikipedia.org/wiki/ブニャコフスキー予想>