

研究レポート

法 m のウェイト付きパスカル三角形上の
1次元確率セル・オートマトンの研究

畑 颯馬（代表），橋本 恵人

（津山工業高等専門学校3年）

研究・実験・データ収集などの期間：2025年4月10日～2025年9月26日

1. はじめに（研究の動機）

通常の 1 次元セル・オートマトンのルールは、ウルフラムコードと呼ばれる $2^8 = 256$ 種類のルールが知られている。それは、時刻 t における隣り合う 3 つセルの 0 と 1 からなる $2^3 = 8$ の情報から、時刻 $t + 1$ の 1 つのセルを決めるルールである。特に、ルール 90 と呼ばれるルールが作る 1 次元セル・オートマトンからはシェルピンスキーのギャスケットと呼ばれるフラクタル図形が生成されることが知られている。シェルピンスキーのギャスケットはパスカル三角形の法 2 から得られる。

さて、私たちは、昨年[1]において、ウエイト付きパスカル三角形の法 m が作る模様のフラクタル次元を詳細に研究し、フラクタル図形にとっても興味をもった。そして、フラクタル図形に関する 1 次元確率セル・オートマトンはフラクタル次元に何らかの関係をもつのではないかと思った。しかし、ウルフラムコードから得られる 1 次元確率セル・オートマトンは必ずしもフラクタル図形には関係しない。そこで、フラクタル性をもつウエイト付きパスカル三角形の法 m の模様から得られる 1 次元確率セル・オートマトンに関して、そのフラクタル次元との関係性について研究しようと考えた。

まず、セル・オートマトンとフラクタル次元に関連するこれまでの研究を調べた。そして、私たちは、論文「Percolation on Fractal Networks [4]」と「Percolation on infinitely ramified fractal networks [5]」に着目した。これらの論文は、自己相似性を持つネットワーク構造（フラクタルネットワーク）の上で、ランダムにノードやエッジを取り除いたり加えたりしたときに、どこかの時点で巨大な「つながり」が生まれるか（＝パーコレーションが起きるか）、その振る舞いはどうなるのかということについて詳細に論じたものである。そして、フラクタルネットワーク上のパーコレーション閾値は、フラクタル次元と関係することが主張されていた。私たちは、ウエイト付きパスカル三角形というフラクタル性をもつフラクタルネットワークを考えている。そして、その上での 1 次元確率セル・オートマトンのシミュレーションを行うことを考えている。以上のことから、[4]と[5]で主張されている閾値とフラクタル次元の具体的な関係式を研究することを目標に研究をスタートさせた。

2. ウエイト付きパスカル三角形

ウエイト付きパスカル三角形を、 xy 座標系の格子点をセル $[x, y]$ と考え、以下のように定義する。

定義 1.1 w を整数とし、セル $[j, k]$ に入る数を $(j, k)^w$ で表す。さらに、 $(0, 0)^w = 1$ 、 $(-1, -1)^w = 1$ 、 $(-1, 1)^w = 1$ とする。 $j \leq -2$ については、

$$(j, k)^w = w \cdot (j - 2, k)^w + (j - 1, k - 1)^w + (j - 1, k + 1)^w$$

とする。このルールで平面的に並べられた数の集合を、 w の **ウエイト付きパスカル三角形** といい、 $Pas(w)$ で表す。このとき、 $Pas(0)$ は、パスカル三角形であることに注意する。

さらに、 $Pas(w)$ を法 m で扱うときは、 $Pas(w, m)$ と表し、**法 m のウエイト付きパスカル三角形** と呼ぶ。

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$Pas(1, 2)$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$Pas(1, 3)$

3. $Pas(w, m)$ のクラスターが作る模様のフラクタル性

パスカル三角形の法 2 が作る図形 $Pas(0, 2)$ は、シェルピンスキーのガスケットと呼ばれるフラクタル図形（自己相似図形）に対応している．本研究で扱っている法 m のウェイト付きのパスカル三角形 $Pas(w, m)$ のクラスターが作る模様もフラクタル図形となるものが多くみられる．



図 3.1（生成図形）

以下の図 3.2 は、 $Pas(1, 5)$ の 0 が白色、0 以外を黒色とした模様で、図 3.1 を生成図形として、それを拡大して得られるフラクタル模様となっている．

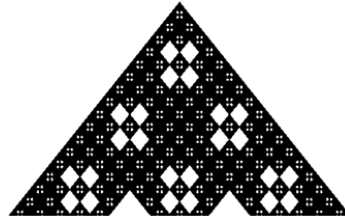


図 3.2（ $Pas(1, 5)$ が作る模様）

フラクタル次元の定義は以下である．

定義 3.1 Ω をフラクタル図形、 Ω の生成図形を 1 とする． $\frac{1}{a}$ を縮小サイズ、 N をもとの構造全体を埋めるのに必要とされる自己相似図形の数とする．このとき、

$$D = \frac{\log N}{\log a}$$

を、 Ω のフラクタル次元という [2]．

たとえば、図 3.3 は、シェルピンスキーのガスケット $Pas(0, 2)$ であるが、 $a = 2, N = 3$ なので、フラクタル次元は、

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \sim 1.585$$

$Pas(1, 5)$ が作るフラクタル模様の生成については、 $a = 5, N = 21$ より

$$D = \frac{\log 21}{\log 5} \sim 1.892$$

となる． 昨年の研究 [1] から、以下のことを得ている．



図 3.3（ $Pas(0, 2)$ のフラクタル模様）

昨年度の研究成果 m を奇素数とし、 $Pas(w, m)$ の支配数とクラスターの模様のフラクタル次元 D は、

$$D = \frac{\log(m^2 - a(w, m))}{\log m} \quad (3.1)$$

である．ここで、 $a(w, m)$ は $Pas(w, m)$ のフラクタル模様の生成図形 $m \times m$ のセルに現れる 0 の個数を表す．

以下の表 3.1 は, $Pas(w, m)$ のフラクタル次元 D の計算結果である. w が大きくなると, D は 2 に近い値をとることがわかる.

表 3.1 $Pas(w, m)$ のフラクタル次元 D

w	m	D	w	m	D
0	2	1.585	0	7	1.7124
1	2	2	1	7	1.9447
0	3	1.6309	2	7	1.9562
1	3	1.8928	3	7	1.9675
2	3	2	4	7	1.9562
0	5	1.6826	5	7	1.9675
1	5	1.8917	6	7	2
2	5	1.9482			
3	5	1.9482			
4	5	2			

4. サイズ L のパスカル・セル・オートマトン

サイズ (ステップ総数) L の $Pas(w, m)$ から得られる 1 次元セル・オートマトンを, $PCA(w, m, L)$ で表し, サイズ L のパスカル・セル・オートマトンと呼ぶ. 具体的に $PCA(w, m, L)$ をどのように作るか, 以下にそのアルゴリズムを示す.

サイズ L のパスカル・セル・オートマトン $PCA(w, m, L)$ のアルゴリズム

- (1) ウェイト w と法 m を決める.
- (2) 浸透確率を p ($0 \leq p \leq 1$) を決める. 浸透確率 p とは, 各セルが確率 p で「開 (open)」, 確率 $1 - p$ で「閉 (closed)」となるものである.
- (3) 定義 1.1 に定めた $Pas(w, m)$ のセルのルールにしたがって, セル $[j, k]$ の数値 $(j, k)^w$ を求める. このとき乱数 p_1 ($0 \leq p_1 \leq 1$) を発生させ, $p_1 \leq p$ ならばセル $[j, k]$ の数値 $(j, k)^w$ はそのままにして, $p_1 > p$ ならば $(j, k)^w = 0$ に変える. この操作をセル $[-L, k]$ ($-L \leq k \leq L$) まで行う.

(例 4.1) 以下は, $PCA(0, 2, 1500)$ で浸透確率 $p = 0.6$ としたときの様子である. この場合, つねに $L = 1500$ まで浸透が続くわけではない.

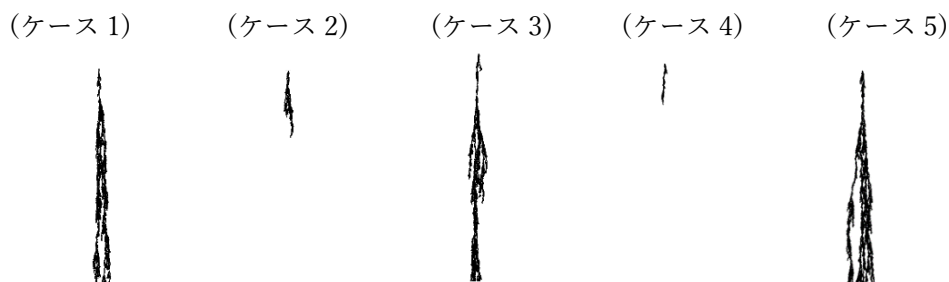


図 4.1 ($PCA(0, 2, 1500)$) の様子

5. $PCA(w, m, L)$ のパーコレーション閾値

一般に、1次元確率セル・オートマトンには、パーコレーション閾値 p_c がただ一つ存在することが証明されている[3].

定義 5.1

(1) サイズ L のパスカル・セル・オートマトン $PCA(w, m, L)$ のアルゴリズムに従って、シミュレーションをする、このとき、 $L \rightarrow \infty$ まで消滅せずに存続する確率を、**生き残り確率**と呼び、 $\theta(p)$ で表す.

(2)

$$p_c = \sup\{p \in [0,1] \mid \theta(p) = 0\}$$

を、パーコレーション ^{しきいち} 閾値 と呼ぶ.

実際は、有限個のデータからパーコレーション閾値 p_c を推定する必要がある. そこで、 $\theta(p, L)$ をサイズ L の生き残り確率とする. そして、

$$X(p, L) = \frac{\partial \theta(p, L)}{\partial p}$$

を考える. このとき、 $X(p, L)$ がピーク（最大値）をとる p を $p_c(L)$ とする. $p_c(L)$ については、 L が無限大に近づくにつれて、以下の式が知られている.

$$p_c(L) \approx p_c + AL^{-\frac{1}{\beta}} \quad (5.1)$$

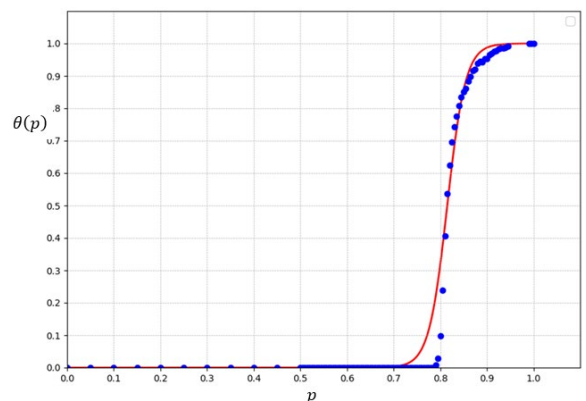
ここで、 A は定数、 β は臨界指数である. (5.1)より $L \rightarrow \infty$ のとき、 $p_c(L) \rightarrow p_c$ となる. 以上により、以下のことが得られる.

p_c は $\theta(p, L)$ を連続関数と考えて、 $0 < \theta(p, L) < 1$ における変曲点として扱ってよい.

(例 5.1) 図 5.1 のグラフは $Pas(0, 2)$ とデータ数 $L = 5000$ から得られたシミュレーションから得られた $\theta(p, 5000)$ の散布図（青色）と近似曲線（シグモイド曲線）

$$\theta(p) = \frac{1}{1 + e^{-51.00(p-0.815)}}$$

である. したがって、この近似曲線で考えると、 $p_c = 0.815$ となる.



しかし、上で与えた近似曲線（シグモイド曲線）は、図 5.1 $PCA(0, 2, 5000)$ における $p - \theta(p)$ グラフ感覚に頼って得られたものであったので、パーコレー

ション閾値は、だいたい0.815とはいえても、それ以上の信用性はない. そこで、

「最適なパーコレーション閾値を求めるにはどうしたらよいか？」

という問いが立つ.

この問いに対する答の1つとして、べき乗則と両対数プロットから求める方法が知られている。それを以下に説明する。

まず、 $\theta(p)$ は $p > p_c$ のとき

$$\theta(p) \propto (p - p_c)^\beta \quad (5.2)$$

であることが知られている。(5.2)より

$$\log \theta(p) \propto \beta \log(p - p_c) + C$$

となる。したがって、対数グラフを考えると、データは直線的で傾きは臨界指数 β となる。

そこで、 p_c の推定値 p_{trial} をいくつか用意して、 $x = \log(p - p_{trial})$, $y = \theta(p)$ のデータから相関係数 r の2乗 R^2 （決定係数と呼ぶ）を求め、 $R^2 \approx 1$ である p_{trial} から最適な p_c を決定することができる。

以下の図 5.2 は、(例 5.1)のデータ $PCA(0, 2, 5000)$ を元に、python コードを使って求めた結果である。これより最適なパーコレーション閾値 $p_c = 0.818000$ で、このときの決定係数は $R^2 = 0.98028$ となる。

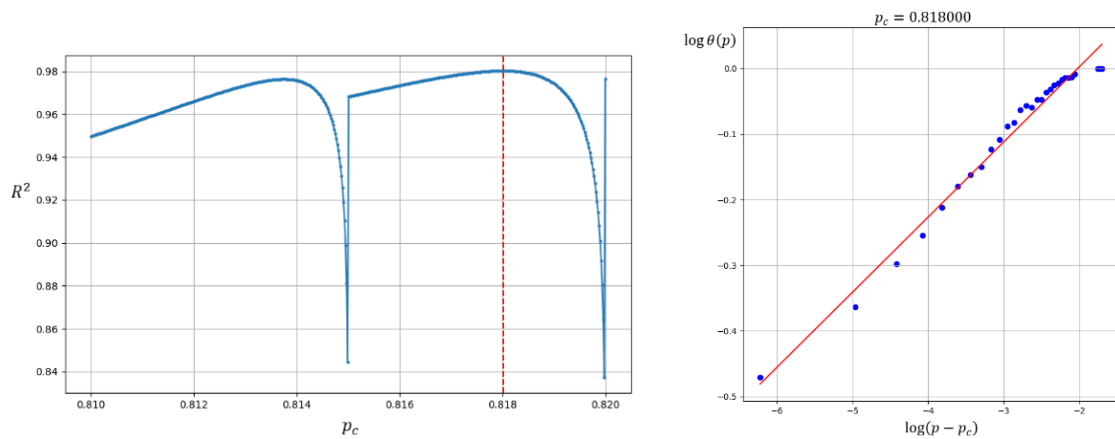


図 5.2 $PCA(0, 2, 5000)$ から推定するパーコレーション閾値

6. さまざまな $PCA(w, m, L)$ のパーコレーション閾値の推定値

今回の研究では、法 m を素数として、 $2 \leq m \leq 47$ について、パーコレーション閾値 p_c の推定値とフラクタル次元 D を求めた。以下の表 6.1 に $m = 2, 3, 5, 7$ の例を挙げる。 $L = 3000$ とした。

表 6.1 $m = 2, 3, 5, 7$ の D と p_c のデータ

m	w	D	p_c	R^2	対数グラフでの回帰直線の式
2	0	1.58496	0.81144	0.99797	$y = -0.1313x - 6.7482$
3	0	1.63093	0.76710	0.99195	$y = -0.1798x - 6.5999$
	1	1.89279	0.66372	0.99740	$y = -0.1519x - 6.6624$
5	0	1.68261	0.73274	0.99920	$y = -0.1592x - 6.6635$
	1	1.89167	0.63054	0.99704	$y = -0.1534x - 6.6434$
	2	1.94819	0.63821	0.99866	$y = -0.1427x - 6.6559$
	3	1.94819	0.62738	0.99898	$y = -0.1504x - 6.6811$

7	0	1.71241	0.71924	0.99830	$y = -0.1759x - 6.6056$
	1	1.94469	0.61387	0.99830	$y = -0.1557x - 6.6223$
	2	1.95624	0.61420	0.99743	$y = -0.1578x - 6.6321$
	3	1.96753	0.62921	0.99727	$y = -0.1489x - 6.6333$
	4	1.95624	0.62287	0.99915	$y = -0.1197x - 6.7580$
	5	1.96753	0.61887	0.99959	$y = -0.1404x - 6.7222$

注意！ $w = m - 1$ の場合は、すべての数値が1となりフラクタル性の意味を失うので挙げていない。

$m = 7$ の場合のフラクタル次元 D は、ほとんどが 1.9 以上となっている。実は、 $7 \leq m \leq 47$ の場合のフラクタル次元 D についてもほとんどが 1.9 以上となっていた。このことは、 $7 \leq m$ の場合の $Pas(w, m)$ の黒色と白色で表したフラクタル模様のほとんどが、黒色で占められている模様であることを意味する。私たちは、フラクタル次元 D とパーコレーション閾値 p_c との関係性を調べていたため、 $2 \leq m \leq 47$ のデータをもとにその散布図を作った（図 6.1）。しかし、 p_c と D に相関は見られなかった。

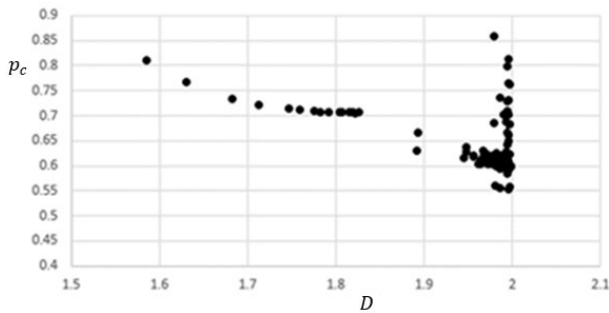


図 6.1 $2 \leq m \leq 47$ における D と p_c の散布図

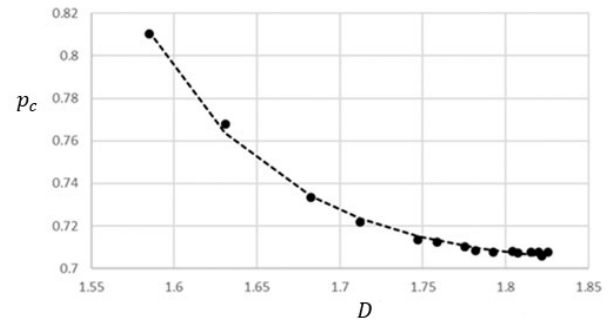


図 6.2 $2 \leq m \leq 47$ の $w = 0$ における D と p_c の関係

図 6.2 は $2 \leq m \leq 47$ の $w = 0$ における D と p_c の関係を表したものである。エクセルの機能を使って調べると、この近似関数は指数関数

$$p_c = 24726316.2196 \cdot \exp(-12.1220 \cdot D) + 0.6996$$

で、決定係数は $R^2 = 0.9968$ であった。しかし、 $1 < D \leq 2$ であるため、上記の近似関数が意味あるとは思えなかった。さらに、「 $w \neq 0$ については、 $Pas(w, m)$ のパーコレーション閾値 p_c はどのように考えればよいか。」これも問題となった。

7. $PCA(w, m, L)$ のフラクタル模様の再検討

これまで、 $PCA(w, m, L)$ のフラクタル模様は、0 を白色、0 以外を黒色で表示させて考えていた。このためその模様のほとんどのフラクタル次元 D が 2 に近いものであった。その後の研究において、1 つの数値 u を黒色で、 u 以外の数値を白色で表示させた模様においてた場合、フラクタル次元 D とパーコレーション閾値 p_c は、 u に依存しないことがわかった。そして、模様に白色が増えたため、 D の値は小さくなった。ところで、この場合のフラクタル次元 D は、公式(3.1)から

$$D = \frac{\log(m^2 - (m^2 - b(w, m)))}{\log m} = \frac{\log(b(w, m))}{\log m}$$

と計算できる．ここで、 $b(w, m)$ はフラクタル模様の生成図形 $m \times m$ のセルに現れる u の個数を表す．

このような検討から、1つの数値 u を黒色と設定した方が、これまでの設定よりもいろいろなことが分かるのではないかと考えた．そして、数値 $u = 1$ だけを黒色で、1以外の数値を白色で表示させたフラクタル模様で研究することにした．

以下の図 7.1 は、 $PCA(w, m, L)$ において、 $m = 19, L = 1000$ から得られた $0 \leq w \leq 17$ における D と P_c の散布図である．

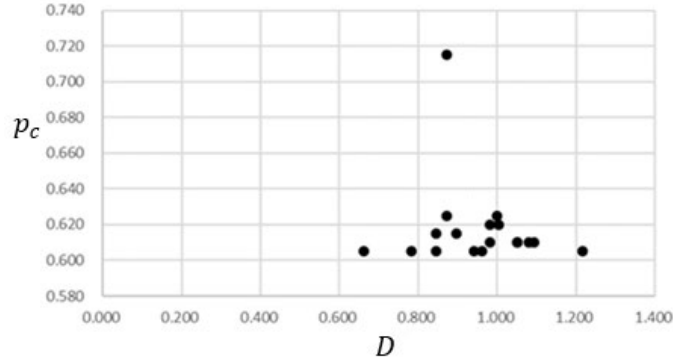


図 7.1 $m = 19$ の $0 \leq w \leq 17$ における D と P_c の散布図

この時点でわかることは $w = 0$ のとき、 $D = 0.871$ 、 $P_c = 0.715$ だけが孤立していることである．

$m = 19$ のとき $0 \leq w \leq 17$ におけるフラクタル次元 D は、 $0.66 < D < 1.05$ の範囲にあり、その平均値 μ と分散 V は

$$\mu = 0.952, \quad V = 0.016$$

であった．これはフラクタル次元 D には、ばらつきがほとんどないことを意味する．

では、「なぜ、 $w = 0$ の $D = 0.871$ 、 $P_c = 0.715$ だけが孤立しているのか？」この謎を探るためにフラクタル模様を再検討することにした．図 7.2 は $w = 19$ のときの $w = 0, 1, 7, 11$ のフラクタル模様である．

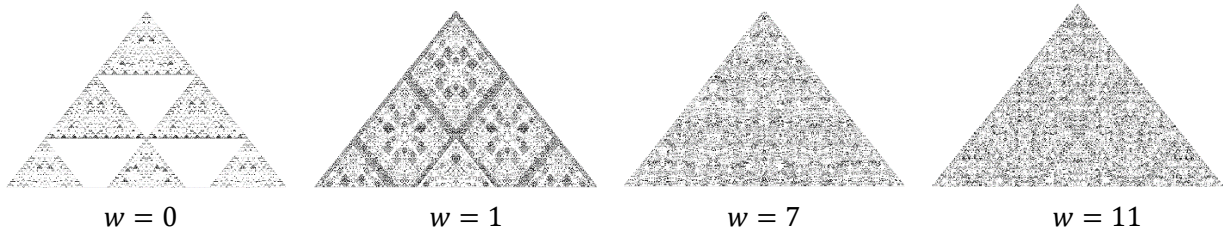


図 7.2 $m = 19$ のときの $w = 0, 1, 7, 11$ のフラクタル模様

図 7.2 をみて、 $w = 0$ の模様には白色の三角形の領域が目立つことがわかる．実は、 $1 \leq w \leq 17$ のフラクタル模様も多少の違いはあるが、 $w = 0$ の模様のように白色の領域が目立つものはなかった．このことから、フラクタル模様の違いは、フラクタル次元 D にあるのではなく、黒色の点を表している1のばらつきにあるのではないかと考えた．

以上のことから、フラクタル模様の生成図形における1の x 方向の分散 V_x 、 y 方向の分散 V_y 、そして共分散 Cov を算出し、パーコレーション閾値 p_c との関係を探ることにした．そして、いろいろな試行錯誤の結果、 (V_x, V_y, Cov) を3次元ベクトルと考え、その距離 $V_{distance} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + Cov^2}$ が重要であることがわかった．表 7.1 は $w = 19$ の場合の分散に関するデータである．

表 7.1 $m = 19$ の分散データ

w	D	Vx	Vy	Cov	V_distance	p_c	w*p_c
0	0.871	17.741	38.973	20.741	47.580	0.723	0.000
1	1.217	14.376	30.090	16.089	37.026	0.608	0.608
2	1.093	15.829	34.827	18.563	42.521	0.613	1.225
3	0.661	11.896	22.015	11.811	27.671	0.613	1.838
4	0.782	13.794	27.091	14.512	33.687	0.618	2.470
5	1.050	12.771	24.010	12.865	30.085	0.608	3.038
6	0.981	13.745	27.202	14.532	33.765	0.603	3.615
7	0.962	14.192	28.405	15.201	35.204	0.603	4.218
8	0.844	14.016	28.617	15.313	35.353	0.618	4.940
9	0.981	15.028	30.620	16.366	37.832	0.628	5.648
10	0.896	12.522	23.469	12.586	29.428	0.618	6.175
11	1.050	13.303	26.033	13.939	32.388	0.623	6.848
12	0.844	14.115	28.229	15.082	34.980	0.628	7.530
13	1.000	12.203	23.028	12.366	28.846	0.618	8.028
14	0.871	11.909	22.042	11.829	27.706	0.613	8.575
15	0.942	13.062	24.634	13.185	30.843	0.613	9.188
16	1.079	15.131	31.999	17.066	39.295	0.613	9.800
17	1.003	13.057	24.933	13.356	31.153	0.623	10.583

図 7.3 の散布図からもわかるように孤立している点は $V_{distance} = 47.58, P_c = 0.715$ であり、これは $w = 0$ に関するデータである。つまり、孤立する点は $V_{distance}$ の値が最も大きい値であることがわかる。そして、 $V_{distance}$ が最大となる w は、 $w = 0$ である。

次に、フラクタル次元 D にばらつきがないことを考えると、パーコレーション閾値 p_c は、 D ではなくて、 w に関係するのではないかと考えた。そして、 $w = 0$ の場合を無視できるようにするために、 w と w と P_c との積 $w \cdot P_c$ との関係に着目してみた。その結果、 w と $w \cdot P_c$ には強い相関がみられ、(図 7.4). $w \cdot P_c$ の w に対する回帰直線と決定係数は、それぞれ

$w \cdot P_c = 0.6188w - 0.0197$, $R^2 = 0.9996$
であった。そして、上記の回帰直線の式は

$$p_c = 0.6188 - \frac{0.0197}{w}$$

という分数関数になり、 p_c は w の関数 $p_c(w)$ であることがわかる。

8. 結論 ($PCA(w, m)$ のパーコレーション閾値 p_c について)

本研究では、1 次元確率セル・オートマトンに関するもので、特に、その模様がフラクタル模様となる法 m のウェイト w 付きパスカル三角形 $Pas(w, m)$ を取り上げ、そのパーコレーション閾値 P_c について調査した。研究当初は、法 m について、0 以外の数の確率セル・オートマトンの P_c について調べていたが、 m が

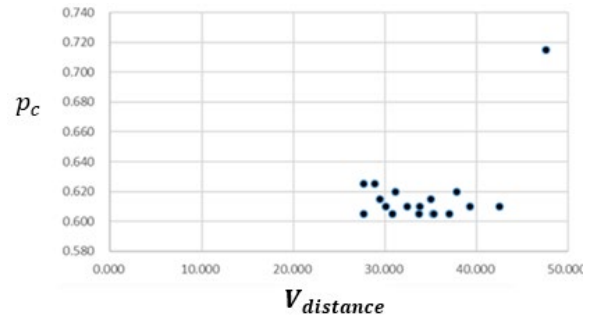


図 7.3 $m = 19$ のときの $V_{distance}$ と P_c の散布図

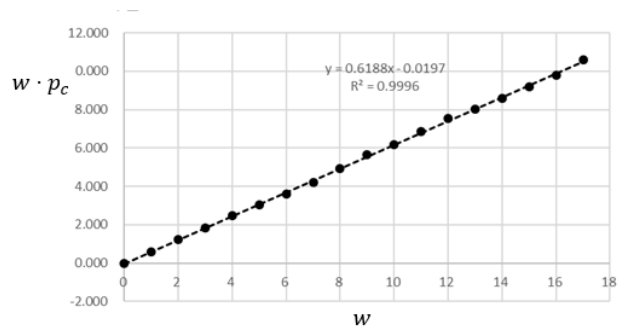


図 7.4 $m = 19$ のときの w と $w \cdot P_c$ の関係

大きくなるにつれ0の割合が小さくなり、そのためフラクタル次元 D は2に近くなり、同時にどのような w についても P_c の値は1に極めて近くなり、 P_c を解析することが困難となった。

そこで、法 m について、1だけの数での確率セル・オートマトンから得られる P_c について調査することに変更した。そして、 m を固定して $Pas(w, m)$ から得られるデータ (w, D, p_c) を解析した。その結果、 P_c の値は、扱いやすい $0.5 < P_c < 0.8$ 程度となり、以下の3つの結果を得ることができた。

結果1. m を固定して、 $Pas(w, m)$ を考え、それぞれの w について、 (V_x, V_y, Cov) を求め、これを3次元ベクトルと考え、その距離を $V_{distance} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + Cov^2}$ とする。 $V_{distance}-p_c$ 散布図を見ると、 $V_{distance}$ が最大なとき p_c の値も最大であり、さらに、このときの w は0である。

表 8.1 最大な $V_{distance}$ と対応する p_c, w のデータ

m	$V_{distance}$ の最大値	p_c	最大な $V_{distance}$ をとる w 値
5	5.02587	0.75252	0
7	9.50318	0.73252	0
11	20.65762	0.72252	0
13	24.83023	0.71752	0
17	38.42235	0.71752	0
19	47.58006	0.72252	0
23	57.15470	0.71025	0

結果2. $5 \leq m \leq 23$ (m は素数)に関して、 $w \neq 0$ に対する p_c の値に大きな違いは見られない。このことを考慮して w と $w \cdot P_c$ の関係に着目した結果、これらは強い相関があることがわかった。これより、 P_c は w に関する分数関数となる。

表 8.2 分数関関数 $P_c(w)$

m	$w \cdot p_c$ の w に対する回帰直線	決定係数 R^2
5	$p_c = 0.6005 + 0.018/w$	0.9994
7	$p_c = 0.6267 + 0.0038/w$	0.9998
11	$p_c = 0.6212 - 0.002/w$	0.9998
13	$p_c = 0.6212 - 0.0088/w$	0.9996
17	$p_c = 0.6208 - 0.0231/w$	0.9993
19	$p_c = 0.6188 - 0.0197/w$	0.9996
23	$p_c = 0.6020 - 0.0003/w$	0.9997

(注意) 分数関数 $p_c(w) = a(m)w + b(m)$ としたとき、 $a(m)$ 、 $b(m)$ の式については、現在、研究中である。

結果3. 1だけの数での確率セル・オートマトン $Pas(w, m)$ の $w = 0$ の場合については、 m と $m \cdot p_c$ に強い相関 ($R^2 = 0.9999$) がみられたことから、 p_c が m の分数関数

$$p_c = 0.7049 + \frac{0.2058}{m}$$

で近似できることがわかった。これより

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_c(m) = 0.7049$$

も得られる。

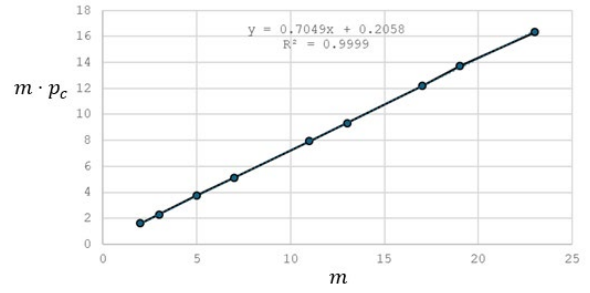


図 8.1 $w = 0$ でのい m と $m \cdot p_c$ の相関

表 8.3 $w = 0$ に対する D と p_c のデータ

m	2	3	5	7	11	13	17	19	23
D	1.58496	1.464974	1.430677	1.391663	1.374471	1.326029	1.326029	1.367103	1.316263
p_c	0.80752	0.76752	0.75252	0.73252	0.72252	0.71752	0.71752	0.72252	0.71025

9. 本研究の応用について

一般に、1次元確率セル・オートマトンにおける閾値 p_c には、大きく分けて2つの意味合いがあり、1つはミクロな相互作用のモデルであり、もう一つは、システム全体の振る舞いの変化を捉えるモデルである。ミクロな相互作用のモデルの応用としては、(1) 絶縁体などに導電性を持つ物質を加える際の導電性を持つ物質になるための充填率のパーコレーション閾値、(2) 臓器上の病気の一次元方向の転移の影響の予測、などが考えられる。システム全体の振る舞いの変化を捉えるモデルの応用としては、(3) 多孔質媒体上をしみこむ液体のパーコレーション閾値、(4) クラドニ図形への応用、などが考えられる。

本研究では、1次元セル・オートマトンとして、ルール 90 とは異なるウエイト w 付きパスカル三角形 $Pas(w, m)$ という様々なフラクタル構造をもつ模様を基礎に、1次元確率セル・オートマトンの閾値 p_c について研究した。そして、 $p_c(w)$ の近似式を突き止めた。本研究が、フラクタルネットワーク上の1次元確率セル・オートマトンの応用の重要な道具として、必ず活かされるものと考えている。

参考文献

- [1] 畑颯馬, 法 m のウエイト付きパスカル三角形のクラスターが作る模様の研究, https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub/hata_2024.pdf
- [2] フラクタル次元, <https://ja.wikipedia.org/wiki/フラクタル次元>
- [3] Haye Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states, ISSN: 0001-8732 (Print) 1460-6976 (Online) Journal, <https://www.tandfonline.com/loi/tadp20>
- [4] Miguel-Ángel Martínez Cruz *, Julián Patiño Ortiz, Miguel Patiño Ortiz and Alexander Balankin, Percolation on Fractal Networks: A Survey, Fractal Fract. 2023, 7(3), 231; <https://doi.org/10.3390/fractalfract7030231>
- [5] Balankin, A.S.; Martínez-Cruz, M.A.; Susarrey-Huerta, O.; Damian-Adame, L. Percolation on infinitely ramified fractal networks. Phys. Lett. A 2018, 382, 12–19.