

研究レポート

n 次パスカル三角形の階差定数に関する研究

原田 煌永, 牧本 幌俊, 小賀 悠真

(津山工業高等専門学校 1 年)

研究・実験・データ収集などの期間：2025 年 4 月 20 日～2025 年 9 月 26 日

1. はじめに（研究の動機）

私たちは数学クラブの活動の中で、J.H.コンウェイと R.K.ガイ著の「数の本」[1]の中にある階差に関する表に興味を持った。例えば、以下の表 1 は自然数の 2 乗から作られる数列とその階差であり、第 2 階差はすべて 2 が並ぶ。

表 1

数列	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
第 1 階差		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
第 2 階差			2	2	2	2	2	2	2	2	

表 2 は自然数の 3 乗から作られる数列とその階差であり、第 3 階差はすべて 6 が並ぶ。

表 2

数列	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
第 1 階差		1	7	19	37	61	91	127	169	217	271
第 2 階差			6	12	18	24	30	36	42	48	54
第 3 階差				6	6	6	6	6	6	6	

一般に、自然数の n 乗から作られる数列では、第 n 階差において、すべて $n!$ が並ぶと書かれてある（証明は書かれていない）。この不思議さと美しさにとっても興味を持った。そして、私たちは「数列とその階差とは一体何なのか」という点で議論を行った。

物理において、高さ h の位置から物体を自由落下させる運動において、空気抵抗がない場合、落下する物体の t 秒後の速度 $v(t)$ は、

$$v(t) = v(0) + gt$$

と表される。ここで、 g は重力加速度である。そこで、 $i = 1, 2, 3, \dots$ として、数列 $v(i)$ を考えると、その第 1 階差 $d(i)$ は、すべての i について

$$d(i) = v(i+1) - v(i) = g$$

となる。

このことから、私たちは、数列 $a(i)$ を、ある環境におけるある物体の速度のような変化する量としてとらえ、 $a(i)$ の第 k 階差を $d^k(i)$ とすると、 $d^k(i)$ は $a(i)$ の第 k 階差から得られる加速度のようなものであるとイメージした。そして、この第 k 階差から得られる加速度 $d^k(i)$ が一定になるときの数値は、その環境におけるある物体の第 k 加速度のような重要な量であると考えた。そして、この観点から、いろいろな数列の研究を行おうということになった。

2. 差分について

本研究の目的は、ある種の数列 $a(i)$ を考え、 $a(i)$ の第 k 階差 $d^k(i)$ が一定の数値 c となるときの、 $a(i)$ と c の関係を解き明かすことにある。この研究のために必要な数学の道具を探していたところ、差分[2]というものがあることを指導教員からアドバイスされた。

定義 1. 数列 $\{a(i)\}$ と任意の正数 i について,

$$\Delta a(i) = a(i+1) - a(i)$$

を, 数列 $\{a(i)\}$ の**差分**と呼び, Δ を**差分作用素**と呼ぶ.

定義 2. 数列 $\{a(i)\}$ について,

$$\Delta^0 a(i) = a(i), \quad \Delta^1 a(i) = \Delta[\Delta^0 a(i)], \quad \Delta^2 a(i) = \Delta[\Delta^1 a(i)], \quad \Delta^3 a(i) = \Delta[\Delta^2 a(i)]$$

一般に

$$\Delta^k a(i) = \Delta[\Delta^{k-1} a(i)]$$

を, 数列 $\{a(i)\}$ の**第 k 回差分**と呼ぶ.

以下の命題 1 が知られている.

命題 1. i を自然数, m, n を $m < n$ である自然数で, $a(i) = i^n$, $b(i) = i^m$ であるとき,

$$\Delta^n a(i) = \Delta^n [i^n] = n!, \quad \Delta^n b(i) = \Delta^n [i^m] = 0$$

が成り立つ.

定義より, 数列 $\{a(i)\}$ の第 k 階差 $d^k(i)$ について,

$$d^k(i) = \Delta^k a(i)$$

であることを注意する. 命題 1 より直ちに以下の命題 2 (はじめにで紹介した事実) が証明される.

定理 2. $a(i) = i^n$ に対し, 第 n 階差 $d^n(i)$ は, $d^n(i) = n!$ となる.

以下, さまざまな数列の第 n 階差を研究する上で, 次のことを定義しておく.

定義 3. 数列 $\{a(i)\}$ に対して, ある自然数 n で, $a(i)$ の第 n 階差数列 $\{d^n(i)\}$ が0でない定数 c の数列 $\{c\}$ に一致するとき, c を $\{a(i)\}$ の**階差定数**と呼び, 数列 $\{a(i)\}$ には**階差定数が存在する**という.

例えば, 表 1 にあるように自然数 i の 2 乗の数列 $a(i) = i^2$ の第2階差数列 $\{d^2(i)\}$ は定数2の数列 $\{2\}$ に一致するので, $a(i) = i^2$ には階差定数 c が存在し, $c = 2$ であるといえる. 表 2 では自然数 i の 3 上の数列 $a(i) = i^3$ の第3階差数列 $\{d^3(i)\}$ は定数6の数列 $\{6\}$ に一致している. したがって, $a(i) = i^3$ には階差定数 c が存在し, $c = 6$ であるといえる.

さて, 数列 $\{a(i)\}$ に階差定数 c が存在するとき, c の意味するところは, c が $\{a(i)\}$ の値の変化の様子を表している点にある. すなわち, $c > 0$ のときは, $\{a(i)\}$ は i の増加とともに $a(i)$ の数値はどんどん大きくなっていき, $c < 0$ のときは, $\{a(i)\}$ は i の増加とともに $a(i)$ の数値はどんどん小さくなっていく. さらに, c の絶対値 $|c|$ は, $\{a(i)\}$ の数値の変化の勢いを表している. すなわち, $|c|$ が大きいとき, $\{a(i)\}$ は i の増加とも

に $a(i)$ の増加（あるいは減少）の割合は急激に変化し、 $|c|$ が小さいとき、 $\{a(i)\}$ は i の増加とともに $a(i)$ の増加（あるいは減少）の割合は緩やかに変化する。このようなことから、 $\{a(i)\}$ の階差定数 c は、 $\{a(i)\}$ の変化に根源的な影響を与えている重要な数値であると考えた。

定理 2 より直ちに次の定理 3 が証明される。

定理 3. $a(i)$ が i に関する n 次多項式とすると、 $\{a(i)\}$ には階差定数が存在する。

例 2.1. $\{a(i)\}$ を三角数の列 $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ とすると、 $a(i) = i(i+1)/2$ である。したがって、 $\{a(i)\}$ には階差定数が存在する。さらに、 $n \geq 1$ として $a(i)$ を n 乗して得られる数列を $\{a^n(i)\}$ とすると、 $\{a^n(i)\}$ にも階差定数が存在する。

3. n 次パスカル三角形の各列の階差定数について

パスカル三角形は理工学のような様々な場面で登場する重要な数の三角形であると言われている。そこで、私たちは、パスカル三角形に潜む階差定数の研究をしようと考えた。

$i \geq 0, j \geq 0$ を整数として、パスカル三角形の i 行 j 列の数を $P(i, j)$ で表す。このとき、 $i \geq j$ のとき

$$P(i, j) = {}_i C_j$$

であり、 $i < j$ のときは $P(i, j) = 0$ である。

定義 4. パスカル三角形 $\{P(i, j)\}$ の成分 $P(i, j)$ を n 乗した数を $P^n(i, j)$ と表し、集合 $\{P^n(i, j)\}$ を **n 次パスカル三角形**と呼ぶ。

1	1	1
1 1	1 1	1 1
1 2 1	1 4 1	1 8 1
1 3 3 1	1 9 9 1	1 27 27 1
1 4 6 4 1	1 16 36 16 1	1 64 216 64 1
: : : : :	: : : : :	: : : : :
パスカル三角形 $\{P(i, j)\}$	2次パスカル三角形 $\{P^2(i, j)\}$	3次パスカル三角形 $\{P^3(i, j)\}$

よく知られているように、パスカル三角形 $\{P(i, j)\}$ には、

$$P(i, j) = P(i-1, j-1) + P(i-1, j)$$

という法則がある。しかし、 $n \geq 2$ のとき n 次パスカル三角形に上式のような法則はすぐには見当たらない。そこで、私たちは、 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列が作る数列 $\{P^n(i)\}$ に着目し、この階差定数を計算し、そこに何らかの法則を見つけたいと考えた。私たちが立てた研究テーマは以下である。

【研究テーマ】 n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の数列を $\{P_j^n(i)\}$ とし、 $\{P_j^n(i)\}$ の階差定数 c_j^n を研究する．さらに、 n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の全体において、第 j 列が作る数列の変化に根源的に影響を与えている第 j 列の n に関する階差定数の数列 $\{c_j^n\}$ を研究する．

まず、 n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の数列 $\{P_j^n(i)\}$ には階差定数 c_j^n が存在することを研究した．

定理 4. n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の数列 $\{P_j^n(i)\}$ には、それぞれの n に対して、階差定数 c_j^n が存在し、

$$c_j^n = \frac{(jn)!}{(j!)^n}$$

となる．

証明．パスカル三角形 $\{P(i, j)\}$ について、 $i \geq j$ のとき

$$P(i, j) = {}_iC_j = \frac{i(i-1) \cdots (i-j+1)}{j!}$$

なので、 $P(i, j)$ は i に関する j 次多項式である．これより、 $P^n(i, j)$ は i に関する jn 次多項式となる．よって、定理 3 より、 $\{P_j^n(i)\}$ には階差定数が存在する．さらに、 $P^n(i, j)$ は i に関する jn 次多項式で、

$$P^n(i, j) = \left(\frac{i}{j!}\right)^{jn} + R(jn-1)$$

ここで、 $R(jn-1)$ は i に関する $jn-1$ 次多項式である．したがって、定理 2 より

$$c_j^n = \Delta^{jn} P_j^n(i) = \frac{(jn)!}{(j!)^n}$$

である．Q.E.D.

例えば、パスカル三角形 $\{P_j^1(i)\}$ から得られる第 j 列の階差定数 c_j^1 は $c_0^1 = c_1^1 = c_2^1 = \cdots = 1$ である．2次パスカル三角形 $\{P_j^2(i)\}$ から得られる第 j 列の階差定数 c_j^2 は

$$c_0^2 = 1, \quad c_1^2 = \frac{(2)!}{(1!)^2} = 2, \quad c_2^2 = \frac{(4)!}{(2!)^2} = 6, \quad c_3^2 = \frac{(6)!}{(3!)^2} = 20, \quad c_4^2 = \frac{(8)!}{(4!)^2} = 70, \quad c_5^2 = \frac{(10)!}{(5!)^2} = 252, \quad \cdots$$

である．さらに、 n 次パスカル三角形 $\{P_j^n(i)\}$ から得られる第 j 列の階差定数 c_j^n を、具体的に $0 \leq j \leq 5$, $1 \leq n \leq 5$ として計算したものが、次頁の表 3 である．

私たちは、 n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ において、第 j 列が作る数列の変化に影響を与える n に関する階差定数の数列 $\{c_j^n\}$ を研究したい．しかし、表 2 の縦列に見るように、 $\{c_j^n\}$ の変化は j と n が大きくなるにつれ数値が大きく複雑である．これまでの研究手法で $\{c_j^n\}$ を研究する訳にはいかないと思われた．

表 3

	c_0^n	c_1^n	c_2^n	c_3^n	c_4^n	c_5^n
$n = 1$	1	1	1	1	1	1
$n = 2$	1	2	6	20	70	252
$n = 3$	1	6	90	1,680	34,650	756,756
$n = 4$	1	24	2,520	369,600	63,063,000	11,732,745,024
$n = 5$	1	120	113,400	168,168,000	305,540,235,000	623,360,743,125,120

4. 階差定数の列の分数列について

フィボナッチ数列 $\{F(n)\}$ は, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ という数列で, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ で定義される数列であるが, その階差数列もまた $\{F(n)\}$ であるため, 階差定数が存在しない. しかし, $\{F(n)\}$ を特徴づける数値として黄金比 Φ が知られている. すなわち, $F(n)$ の分数列 $Q(n) = F(n+1)/F(n)$ を考えると,

$$Q(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

となる. これは, 階差定数が存在しないと思われる場合は, その分数列を考えるとある種の定数が得られることを示唆している.

そこで, 定理 4 で得られた $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の数列 $\{P_j^n(i)\}$ の階差定数の列 $\{c_j^n\}$ の分数列を研究することにした. そのために,

$$Q_j(n) = \frac{c_j^{n+1}}{c_j^n}$$

と置く.

定理 5. $Q_j(n)$ は整数値をとり,

$$Q_j(n) = {}_{j(n+1)}C_j$$

である.

証明. $c_j^n = \frac{(jn)!}{(j!)^n}$ であるので,

$$Q_j(n) = \frac{\frac{(j(n+1))!}{(j!)^{n+1}}}{\frac{(jn)!}{(j!)^n}} = \frac{j(n+1) \cdot \{j(n+1) - 1\} \cdots \{j(n+1) - jn + 1\}}{j!} = {}_{j(n+1)}C_j$$

となり, 整数値である. Q.E.D.

定理 5 を具体的に計算する. 例えば, 階差定数の列 $\{c_j^1\}$ の分数列 $Q_j(1)$ は

$$Q_0(1) = 1, \quad Q_1(1) = {}_2C_1 = 2, \quad Q_2(1) = {}_4C_2 = 6, \quad Q_3(1) = {}_6C_3 = 20, \quad Q_4(1) = {}_8C_4 = 70, \quad \dots$$

である. 階差定数の列 $\{c_j^2\}$ の分数列 $Q_j(2)$ は

$Q_0(2) = 1, Q_1(2) = {}_3C_1 = 3, Q_2(2) = {}_6C_2 = 15, Q_3(2) = {}_9C_3 = 84, Q_4(2) = {}_{12}C_4 = 495, \dots$
 である. $0 \leq j \leq 5, 1 \leq n \leq 5$ として $Q_j(n)$ 計算したものが, 以下の表 4 である.

表 4

	$Q_0(n)$	$Q_1(n)$	$Q_2(n)$	$Q_3(n)$	$Q_4(n)$	$Q_5(n)$
$n = 1$	1	2	6	20	70	252
$n = 2$	1	3	15	84	495	3,003
$n = 3$	1	4	28	220	1,820	15,504
$n = 4$	1	5	45	455	4,845	53,130
$n = 5$	1	6	66	816	10,626	142,506

さて, これまで n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ のどういった階差定数を求めてきたかを説明する. 例えば, n 次パスカル三角形の第 2 列は, $\{P^n(i, 2)\}$ であり, 各 n に対する第 2 列の数値 $P_2^n(i) = P^n(i, 2)$ の階差定数は, $c_2^n = \frac{(2n)!}{(2!)^n}$ であった. c_2^n を具体的に書くと,

$$1, 6, 90, 2,520, 113,400, \dots$$

である. しかし, この数列を見る限り, n 次パスカル三角形の第 2 列の c_2^n が, n が増えるに従いその増え方が大きすぎて意味を見出すことが難しい. そこで, c_2^n の分数列 $Q_2(n)$ を考えたところ, $Q_2(n) = {}_{2(n+1)}C_2$ が得られた. $Q_2(n)$ を具体的に書くと,

$$6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, \dots$$

という数列であり, $Q_2(n)$ は c_2^n に比べ扱いやすい数列に思えた. そこで, $Q_2(n)$ の第 k 階差をみると第 2 階差で階差定数 $4 = 2^2$ が得られることがわかる (表 5).

表 5

数列 $Q_2(n)$	6	15	28	45	66	91	120	153
第 1 階差	9	13	17	21	25	29	33	
第 2 階差		4	4	4	4	4	4	

同様に, n 次パスカル三角形の第 3 列の階差定数は, $c_3^n = \frac{(3n)!}{(3!)^n}$ であった. c_3^n を具体的に書くと,

$$1, 20, 1680, 369600, 168168,000, \dots$$

である. c_3^n の分数列 $Q_3(n)$ を考えると, $Q_3(n) = {}_{3(n+1)}C_3$ が得られる. $Q_3(n)$ を具体的に書くと,

$$20, 84, 220, 455, 816, 1330, 2024, 2925, \dots$$

という数列であり, $Q_3(n)$ は c_3^n に比べ扱いやすい数列である. そこで, $Q_3(n)$ の第 k 階差をみると第 3 階差で階差定数 $27 = 3^3$ が得られることがわかる (表 6).

表 6

数列 $Q_3(n)$	20	84	220	455	816	1330	2024	2925
第 1 階差	64	136	235	361	514	694	901	
第 2 階差		72	99	126	153	180	207	
第 3 階差			27	27	27	27	27	

このことを一般化したものが次の定理 6 である.

定理 6. $Q_j(n)$ には階差定数 q_j が存在し,

$$q_j = j^j$$

である.

証明. 定理 5 より $Q_j(n) = {}_{j(n+1)}C_j$ であった. よって,

$$Q_j(n) = {}_{j(n+1)}C_j = \frac{j^j}{j!} n^j + R(j-1)$$

となる. ここで $R(j-1)$ は n に関する $j-1$ 次多項式である. したがって, $Q_j(n)$ には階差定数が存在し, $Q_j(n)$ の n についての差分を考えると,

$$q_j = \Delta^j [Q_j(n)] = j^j$$

となる. Q.E.D.

定義 5. 定理 6 で得られた階差定数 q_j を, n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の**内在的階差定数**と呼ぶ.

5. $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の内在的階差定数に関する研究のまとめ

物理の自由落下の運動において, 空気抵抗がない場合, 速度から得られる数列の差分が重力加速度 g になるということをヒントに, n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列が作る数列において, 重力加速度 g のように, 各列の数値の変化に影響を与えるものは何かという問いをたてた. そして, 数列の第 k 階差が0でないある定数(重力加速度 g に対応する)の数列になるとき, それを階差定数と呼び, これについて研究した.

例えば, n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の3列目(三角数の n 乗の数列)について, どのような結論が得られたかをみてみよう.

ステップ 1 : 数列 $P^n(i, 3)$ の各 n についての階差定数 c_3^n を求めた.

表 7 に見るように, 三角数の数列の変化に影響を与えている階差定数は $c_3^1 = 1$ であり, 三角数の2乗の数列数列の変化に影響を与えている階差定数は $c_3^2 = 20$, 三角数の3乗の数列の変化に影響を与えている階差定数は $c_3^3 = 1,680$ というように, c_3^n は n が大きくなるにつれ, 爆発的に増えている. そして c_3^n の階差定数はどのようなものだろうかと考えた. しかし c_3^n の爆発的増え方から c_3^n の階差定数を求める気にはなれなかった, そこで, $Q_3(n) = c_3^{n+1}/c_3^n$ から何かわかるのではないかと考えた.

表 7

	数列 $P^n(i, 3)$	階差定数 $c_3^n = \frac{(3n)!}{(3!)^n}$
$n = 1$	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...	1
$n = 2$	$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2, 28^2, 36^2, 45^2, 55^2, \dots$	20
$n = 3$	$1^3, 3^3, 6^3, 10^3, 15^3, 21^3, 28^3, 36^3, 45^3, 55^3, \dots$	1,680
$n = 4$	$1^4, 3^4, 6^4, 10^4, 15^2, 21^4, 28^4, 36^4, 45^4, 55^4, \dots$	369,600
$n = 5$	$1^5, 3^5, 6^5, 10^5, 15^5, 21^5, 28^5, 36^5, 45^5, 55^5, \dots$	168,168,000

ステップ 2 : 数列 $P^n(i, 3)$ の階差定数の数列 c_3^n の分数列 $Q_3(n)$ を求めた.

表 8

階差定数 c_3^n の数列	1, 20, 1,680, 369,600, 168,168,000, ...
c_3^n の分数列 $Q_3(n) = \frac{c_3^{n+1}}{c_3^n}$	20, 84, 220, 455, 816, 1330, 2024, 2925, ...

n が大きくなるにつれ c_3^n は爆発的に変化する. これに対して, $Q_3(n) = c_3^{n+1}/c_3^n$ は比較的扱いやすい数列となっている. $Q_j(n)$ の階差定数 q_3 を調べてみる必要性を感じた.

ステップ 3 : c_3^n の分数列 $Q_3(n)$ の階差定数 q_3 を求めた.

表 9

数列 $Q_3(n)$	20	84	220	455	816	1330	2024	2925
第 1 階差	64	136	235	361	514	694	901	
第 2 階差		72	99	126	153	180	207	
階差定数 $q_3 = 3^3$		27	27	27	27	27		

結論: ステップ 3 で示したように, n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, 3)\}$ の第3列の内在的階差定数 q_3 は $3^3 = 27$ であった. 同様にして, 第2列の内在的階差定数 q_2 は $2^2 = 4$ で, 第4列の内在的階差定数 q_4 は $4^4 = 256$ であることがわかった. このことから, 私たちは, n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列の内在的階差定数 q_n は j^j であると予想し, これを定理 6 で証明した.

6. 3 回以上の微分で定数になる物理現象について

本研究のヒントになった物理現象は, 物理の自由落下の運動であった. そして, 指導教員から, 本研究で扱う数列の階差や差分は, 関数における微分に対応するということを教わった. 例えば, 物理の自由落下の運動に関しては, 落下距離に関する関数を 2 回微分すると重力加速度 g という一定の値になる. それでは, 3 回以上の微分で一定になるような物理現象はあるのだろうか. この点について調べてみた.

まず, 時間変化に伴う物理現象において, 2 回の微分を加速度, 3 回の微分をジャーク, 4 回の微分を

スナップ, 5回の微分はクラックル, 6回の微分はポップといった名前が付けられている。

3回の微分ジャークが一定の値になるものは, 加速度が時間に対して線形に変化する運動である。具体的な例としてはS字加減速に関するエレベーターや電車の滑らかな制御, ロボットアームの精密制御, ロケットエンジンの推力制御, 自動車の快適な運転などが挙げられる。いずれもジャークを一定に保つように制御することで, 非常に滑らかで振動の少ない動きを実現し, 高速かつ正確な作業を可能するものであると言われている。

4回の微分スナップが一定の値になるものについては, 超精密工作機械や半導体製造装置において, ナノメートル単位の精度が求められる半導体の露光装置や, 精密なレンズを研磨する機械などがあり, わずかな振動も許されないということである。このような分野では, ジャークだけでなく, その変化率であるスナップまで考慮した軌道計画が行われているという。このことから, 機械の振動を極限まで抑制し, 最高の加工精度を達成しているようである。

5回以上の微分であるクラックルやポップが一定の値になるものについては, 最先端の軌道計画や振動抑制制御などがある。例えば, 天文台の大型望遠鏡の姿勢制御においては, 巨大で重い望遠鏡を天体に向けて正確に追尾させる際, 駆動系の振動は観測精度に致命的な影響を与えるということである。ここでも, ジャークやスナップを最小化する滑らかな制御アルゴリズムが用いられ, 4回以上の微分が一定になる区間を持つ運動が実現されているということである。

3回以上の微分で一定になる現象は, 単純な自然現象というよりは, 「運動の質 (滑らかさ, 快適さ, 精度)」を向上させるために人間が積極的に作り出している工学的な現象とすることができるようである。

7. 今後の展望

本研究では, n 次パスカル三角形 $\{P^n(i, j)\}$ の第 j 列が作る数列において, 数列の第 k 階差が0でないある定数の数列になるとき, それを階差定数と呼び, これについて研究し, 5個の定理を証明するという成果を上げた。しかし, この研究は単に数学的な研究にとどまるのであろうかと考え, 階差定数を n 回の微分で一定になるものという物理現象について調べてみると, 「運動の質 (滑らかさ, 快適さ, 精度)」を向上させるために人間が積極的に作り出している工学的な現象で重要になることがわかった。したがって, 今回獲得した階差定数に関する手法は, n 階の階差が定数となるような物理現象にも使えるのではないかと考えている。

参考文献

- [1] J.H.コンウェイ, R.K.ガイ, 数の本, 丸善出版, 平成 24 年
- [2] 北海道算数数学教育会高校部会研究部代数解析研究会, 差分と和分 — 微分と積分の数列版 —
http://izumi-math.jp/K_Sugimoto/difference_and_sum.pdf