

二面体群の作用で不変なグラフの閉曲面への埋め込み

圓山夏生

津山工業高等専門学校総合理工学科（4年）

1. 研究の動機と目的

本研究は、グラフ理論の「グラフの閉曲面への埋め込み問題」という問題に取り組む。それは、現実問題として電子回路への応用も知られている。グラフとは、「ノード（頂点）とエッジ（辺）の集合で構成されたもの」である。閉曲面とは、球や一人乗りの浮き輪や二人乗りの浮き輪、一般に n 人乗りの浮き輪というものを指し、その浮き輪にある穴の数を、種数（genus）と呼び、 g という記号で表す。そして、閉曲面は g で分類できるという定理が知られている。

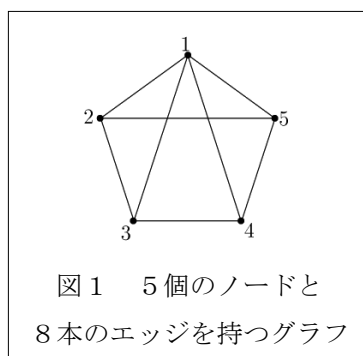
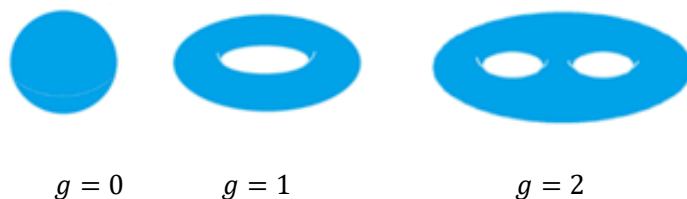


図1 5個のノードと8本のエッジを持つグラフ



$g = 0$

$g = 1$

$g = 2$

図2 閉曲面の種数 g

さて、今回の研究テーマである「グラフの閉曲面への埋め込み問題」とは、

『グラフをある閉曲面上に、どの2つのエッジも交わらないように描くとき、その閉曲面の最小種数 g を求めよ』

というものである。このとき交差しなければエッジは曲面上で自由に変形できるとする。

グラフの中には、**完全グラフ**と呼ばれる特別なものがある。それは、「任意の2個のノードを繋ぐエッジが必ず存在するグラフ」を指す。そして、完全グラフの総エッジ数は、 $n(n-1)/2$ であり、さらに、完全グラフは、

$$g = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

である閉曲面に埋め込まれ、この g が最小であるということが知られている（[2]参照）。

これを**完全グラフの最小種数公式**と呼ぶ。ここで、記号 $\lceil x \rceil$ は、 x の切り上げを表す。しかし、完全グラフでないグラフについては埋め込み公式はわかっていない。

以下、 n 個のノードを持つ完全グラフを K_n で表す。たとえば、完全グラフ K_5 を考える

と、これは完全グラフの最小種数公式より、 $g = \left\lceil \frac{(5-3)(5-4)}{12} \right\rceil = 1$ の閉曲面に埋め込まれる。

具体的な埋め込みの様子を描いたものが図3である。ここで閉曲面を上から見たとき、正面に埋め込まれたエッジを実線で、背面に埋め込まれたエッジを点線で表している。

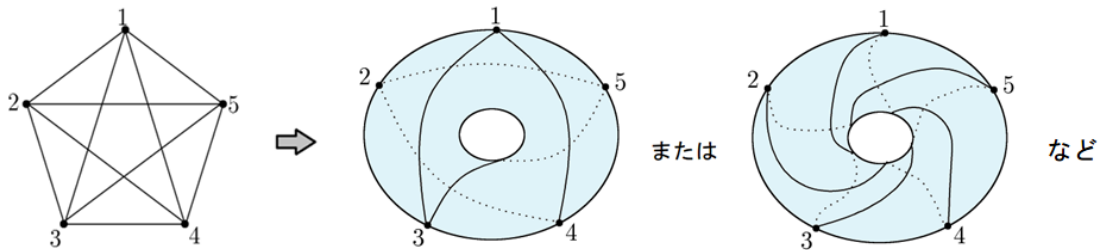


図3 完全グラフ K_5 の埋め込み

ここで、私は K_5 の $g = 1$ の閉曲面への埋め込みで回転対称をもつような埋め込みに興味をもった。対称性という視点に立つと K_5 自身も $1/5$ 回転対称と、5つの鏡映という対称性を持っている。次の節で詳細に述べるが、完全グラフの部分グラフで対称性をもったものについては、規則正しく埋め込むことができる曲面が存在するのではないかと考えた。つまり、どのような対称性を持つグラフがどのような曲面に埋め込まれるかという視点から、グラフに関する研究を行うことにした。

2. 完全グラフ K_7 と K_9 の閉曲面への埋め込み

前節で述べたように、完全グラフ K_5 については、 $g = 1$ の閉曲面へ回転対称をもつような埋め込みが存在した。では、完全グラフ K_7 や K_9 の埋め込みについてはどうだろうか。

まず、 $n = 7$ でエッジ数 $e = 21$ をもつ完全グラフ K_7 の埋め込みについて説明する。これは完全グラフの最小種数公式から $g = 1$ の閉曲面に埋め込まれる。 K_5 と同じように、私が注目した埋め込みは、以下の図4である。

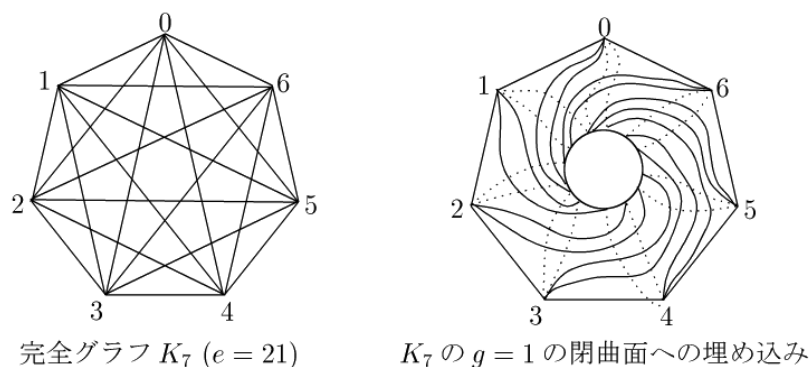


図4

完全グラフ K_7 は、それ自身で対称性を持っている。それは、 $1/7$ 回転対称と、7つの鏡

映である．そして上に描いた $g = 1$ の閉曲面への埋め込みは，穴に巻きつく形で $1/7$ 回転対称性を持っている．

次に， $n = 9$ でエッジ数 $e = 36$ をもつ完全グラフ K_9 の埋め込みは完全グラフの最小種数公式から $g = 3$ の閉曲面に埋め込まれる．やはり，私が注目した埋め込みは，以下の図 5 である．

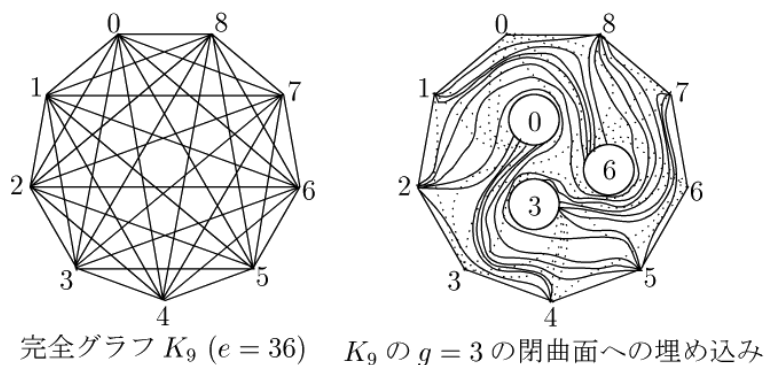


図 5

完全グラフ K_9 の対称性は， $1/9$ 回転対称と，9 つの鏡映である．そして上に描いた $g = 3$ の閉曲面への埋め込みは，穴に巻きつく形で $1/3$ 回転対称性を持っている．

以上のことから，私は，完全グラフでないものは，最低種数 g を求める公式がないのだが，しかし，ある特定の条件の下では，公式が作れるのではないかと考えた．すなわち，穴に巻きつくようにエッジを埋め込むという完全グラフの埋め込みをヒントにして対称性をもつグラフを考えれば，何らかの結果が得られるのではないかと考えた．

3. 二面体群の作用とグラフのタイプ

完全グラフ K_n は， $1/n$ 回転対称と， n 個の鏡映軸をもつ．このことは現代の数学では，二面体群や巡回群という概念を用いて表現される．まず，それらを以下に説明する．

二面体群 D_n ：例えば，正三角形は， $1/3$ 回転対称性，頂点と重心を通る直線に関する対称性（鏡映）をもつ．作用とは， $1/3$ 回転や鏡映のことを指し，作用全体を正三角形の二面体群 D_3 という．一般に，正 n 角形に作用する $1/n$ 回転や鏡映の作用全体を，正 n 角形の二面体群 D_n という．



図 6

巡回群 Z_n ：二面体群 D_n の中の鏡映を除いた $1/n$ 回転だけの作用全体のことを指す．

さて、グラフが与えられたとき、そのグラフが、 D_n 不変であるとは、 $1/n$ 回転や n 個の鏡映の作用で変化しないグラフを指す。同様に、 Z_n 不変であるとは、そのグラフが $1/n$ 回転の作用で変化しないグラフを指す。

右に示すグラフは、10個のノードと25本のエッジを持つグラフで、 D_5 不変なものである。エッジを外周とする対称性を示す図形を取り出すと、 Z_{10} 不変である正10角形が1個、 Z_5 不変である正五角形が1個(0,2,4,6,8,0)、 Z_5 不変である星型正五角形が1個(1,5,9,3,7)、残りは、 Z_5 で移り合う直線が5個((0,5), (1,6), (2,7), (3,8), (4,9))となっている。

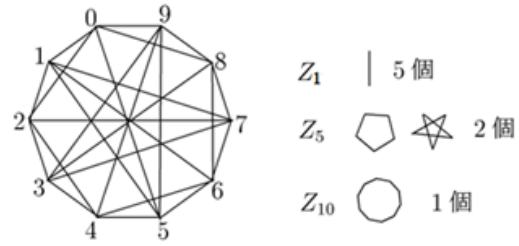


図 7

以下、本論文では、正10角形を Z_{10} で、正五角形や星型正五角形を Z_5 で、そして直線を Z_1 で表わし、このグラフを

$$G_{10}[5Z_1 \oplus 2Z_5 \oplus Z_{10}; 25] \quad (D_5 \text{不変})$$

と表すことにし、グラフ G_{10} のタイプと呼ぶ。また、以下において、 G_{10} を構成する部分グラフをそれぞれ、 $Z_1(0,5)$, $Z_1(1,6)$, $Z_1(2,7)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(4,9)$, $Z_5(0,2,4,6,8)$, $Z_5(1,5,9,3,7)$, $Z_{10}(0,1,\dots,9)$ と表す。()内は部分グラフのノードの番号を表す。

一般に、 p を素数、 q をある正の整数としたとき、

$$G_{qp}[i_1pZ_1 \oplus i_pZ_p \oplus i_{qp}Z_{qp}; e] \quad (Z_p \text{不変})$$

と書いたら、これは、その要素が、 p 個の直線 Z_1 が i_1 個、 Z_p 不変な正 p 角形が i_p 個、 Z_p 不変な正 qp 角形が i_{qp} 個で構成されていることを表し、さらに、 qp 個ノードと e 個のエッジをもつグラフであることも示すものである。ここで、 $e = i_1p + i_p \cdot p + i_{qp} \cdot (pq)$ である。そして、これをグラフ G_{qp} のタイプと呼ぶ。

この定義をもとに、改めて完全グラフ K_7 の埋め込みを考えると、 K_7 のタイプは、

$$G_7[3Z_7; 21] \quad (D_7 \text{不変})$$

であり、 $g = 1$ の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込むことができる。また、完全グラフ K_9 のタイプは、

$$G_9[4Z_9; 36] \quad (D_3 \text{不変})$$

で、 $g = 3$ の閉曲面へ Z_3 不変に埋め込むことができる。

4. ハブを経由した埋め込み

グラフの閉曲面への埋め込みを、なるべく分かりやすく行なうために、条件付きハブというものを考案した。これについて局所的な埋め込みを表した図8を使って説明する。

番号付きの点はノードの番号を表わし、番号付きの円は閉曲面の穴の番号を表す。そし

て、 h_A, h_B は閉曲面の上面に設置されたハブ（以下、**上面ハブ**という）を、 h_a, h_b は閉曲面の下面に設置されたハブ（以下、**下面ハブ**という）を表し、 h_3, h_6 は閉曲面の穴付近に設置されたハブ（以下、**両面ハブ**という）で、実線から点線に移す役割を果たすものである。さらに $\bar{h}_3, \bar{h}_6$ は閉曲面の穴付近に設置された両面ハブで、点線から実線に移す役割を果たすものである。以上のことから、ハブを使って表された局所的な図では、エッジの埋め込みをノードが並べられた直線 L の上側だけで行うものとしてもよいので、以下そのようにする。

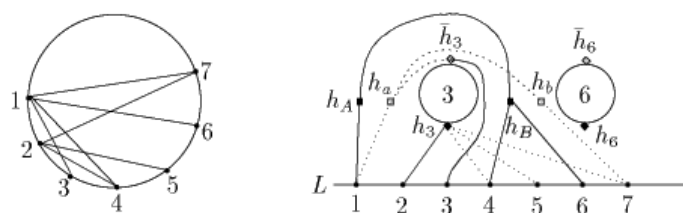


図 8（グラフと条件付きハブを用いた埋め込み）

図 8は左図のグラフをある閉曲面の穴 3 と穴 6 の周りに埋め込んだ様子で、ハブを用いて表したものである。具体的には、エッジ(1,4)と(1,6)はハブ h_A と h_B を経由して、エッジ(1,7)はハブ h_a と h_b を経由して、エッジ(1,3)はハブ h_a と $\bar{h}_3$ を経由して埋め込まれている。そして、エッジ(2,4), (2,5)と(2,7)はいずれもハブ h_3 経由して埋め込まれている。このようにハブを使うと、埋め込まれたエッジの中で束ねられるものは見かけ上 1 本のエッジとして表せるため、描くエッジの本数を少なくできるという利点がある。

定義 1. エッジ (s_1, t_1) がハブ h_* を経由して埋め込まれるとき、 (s_1, t_1) は h_* 経由で埋め込み可能であるという。

定義 2. 記号 $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ を、 h_* 経由の局所埋め込みという。このとき番号 i_k, j_k は[]内のノードの番号であり、左から右に並んだ順の番号で、 j_1 は i_n の右に位置する。さらに $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ がハブ h_* に入るノードを、 $[j_1, j_2, \dots, j_r]$ がハブ h_* から向かうノードを意味する。

閉曲面上の領域でその内部の任意のループを1点に収縮（可縮という）できるものを単連結領域という（図10）．ところで、グラフの埋め込みに関して、閉曲面上の閉領域内にループとして埋め込まれた曲線については、可縮を行っても閉曲面の種数は変化しない．したがって、単連結領域内での連続変形に可縮は含めてもよい

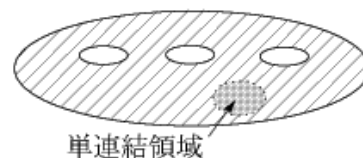


図10（種数3の閉曲面上の単連結領域）

位相幾何学におけるジョルダン曲線の定理を確認する．

ジョルダン曲線の定理． 単連結領域 D 上に置かれた自己交差をもたない閉曲線 Γ （ジョルダン曲線）は、 D を内側と外側に分ける．

次の命題は、ジョルダン曲線の定理から直ちに示される．

命題1． 単連結領域 D 内のジョルダン曲線 Γ の内側にある点 a と外側にある点 b を考える．このとき、エッジ (a, b) は Γ と交差する．

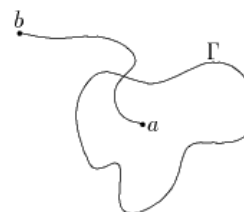


図9

命題2． 2つのエッジ (a, b) と (a, c) が曲面上の単連結領域 D 内に、自己交差しない曲線としてそれぞれ埋め込まれ、しかし2つの曲線は交差している（無限交差の場合も含む）とする．このとき、それらの交点を連続変形により全て外して自己交差しない曲線 (b, a, c) とすることができる．

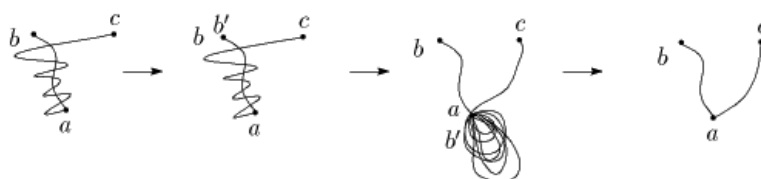


図11

（証明）まず、埋め込まれた曲線も (a, b) と (a, c) と書くことにする．単連結領域内に点 b' を考え、それを b と重ねて置く．そして b' を曲線 (a, b) に沿って a の方向へスライドさせる．このとき、もし b' が (a, b) と (a, c) の交点と出会ったなら、その交点も同時にスライドさせる． b' が a に達したら、曲線 (a, c) は単連結領域内の点 a の周りにループをもつ曲線となる．そこでそれらのループを全て a に可縮することで、自己交差しない曲線 (b, a, c) が得られる．

Q. E. D.

次に、ハブ h_* 経由の局所埋め込み $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ に関する以下の3つの命題を証明する。

命題3. ハブ h_* は上面ハブまたは下面ハブとし、 h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1], [j_1, j_2])$ とする。そしてノード s, t について以下の(1), (2)を考える。ただし、 t は s の右側にあるとする。

(1) s, t はどちらも i_1 と j_1 の間のノードである。ただし、 $s = i_1, t = j_1$ も許す。

(2) s は i_1 の左側で t は j_2 の右側にある。ただし、 $s = i_1, t = j_2$ も許す。

このとき、 s, t が(1)か(2)のどちらかを満足するならば、エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能である。

(証明) (1)の場合、エッジ (s, t) と (i_1, j_1) を考えると、命題2より (s, t) と (i_1, j_1) は交差しないように埋め込むことができ、このとき (s, t) は (i_1, j_2) とも交差しない。(2)の場合も同様に、命題2より (s, t) と (i_1, j_2) は交差しないように埋め込むことができる。このとき (s, t) は (i_1, j_1) とも交差しない。したがって、エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能である。

Q. E. D.

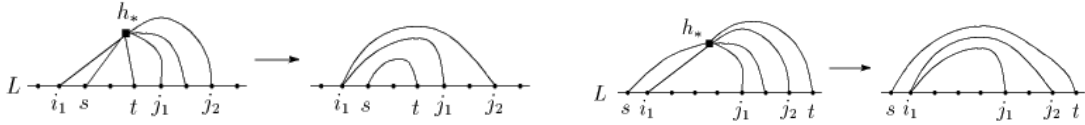


図1 2

命題4. ハブ h_* は上面ハブまたは下面ハブとし、 h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1], [j_1, j_2])$ とする。そしてノード s, t について以下の(1), (2)を考える。ただし、 t は s の右側にあるとする。

(1) s は i_1 の左側で t は i_1 と j_2 の間にある。(2) t は j_2 の右側で s は i_1 と j_2 の間にある。

このとき、 s, t が(1)か(2)のどちらかを満足するならば、エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能ではない。

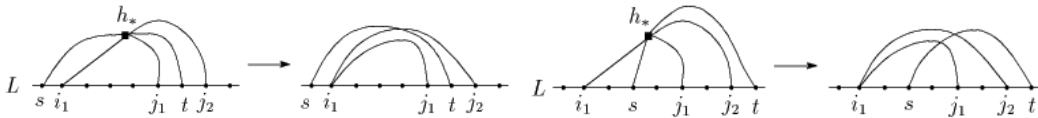


図1 3

(証明) (1)のとき、ハブを外してループするエッジ (i_1, j_1, j_2, j_1) を考えるとそれはジョルダン曲線 Γ となる。このとき、エッジ (s, t) の埋め込みは L の上側で考えているため、 (s, t) は Γ の内点を通過しなければならない。したがって、命題1より (s, t) は (i_1, j_1) またはエッジ

(i_1, j_2) と必ず交わる．(2)の場合も(1)と同じ理由からエッジ (s, t) はエッジ (i_1, j_1) またはエッジ (i_1, j_2) と必ず交わる．したがって， (s, t) は， h_* 経由で埋め込み可能ではない．Q. E. D.

命題 5. ハブ h_* は両面ハブとし， h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1], [j_1, j_2])$ とする．このときノード s, t について以下が成り立つ．ただし s は t の左側にあるとする．

(1) s は i_1 の左側で t は j_1 と j_2 の間にあるとき，エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能ではない．

(2) s は i_1 の右側にあるとき，エッジ (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能である．ただし， $s = i_1$ も許す．

(証明) (1)の場合(図 1 4)， h_* を外して穴 N を考え，ノード (i_1, j_1) の実線から点線に変わる点を j'_1 とする．同様にノード (i_1, j_2) の実線から点線に変わる点を j'_2 とする．そして，ループするエッジ $(j_1, j'_1, j'_2, j_2, j_1)$ を考えるとそれはジョルダン曲線 Γ となる．このとき，エッジ (s, t) の埋め込みは L の上側で考えているため， (s, t) は Γ の内点を通すしなければならない．したがって，命題 1 より (s, t) は (i_1, j_1) またはエッジ (i_1, j_2) と必ず交わる．よって， (s, t) は h_* 経由で埋め込み可能ではない．(2)の場合が成り立つことは明らかである(図 1 5)．Q. E. D.

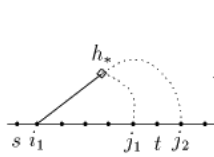


図 1 4

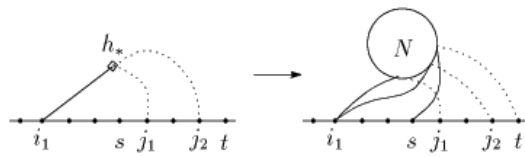


図 1 5

上の 3つの命題は，以下で挙げる定理の証明に用いる．そのために，例えば，エッジ (s, t) が，点 s からハブ h_X と h_Y を実線で経由して， h_Y から t まで点線で埋め込まれることを，

$$(s - h_X - h_Y \cdots t)$$

で表す．

定義 3. ある閉曲面上に h_* と h_o という 2つのハブがあり， h_* 経由の局所埋め込みを $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ ， h_o 経由の局所埋め込みを $h_o([k_1, k_2, \dots, k_n], [l_1, l_2, \dots, l_r])$ とする．もし $k_1 - i_1 = \dots = k_n - i_n = l_1 - j_1 = \dots = l_r - j_r = u$ が成り立つとき，ハブ h_* と h_o は対等であるという．このとき， h_o 経由の局所埋め込みを， h_* を右方向へ u 平行移動させた埋め込みという．

命題 6. ハブ h_* の局所埋め込みを $h_*([i_1, i_2, \dots, i_n], [j_1, j_2, \dots, j_r])$ とする．このとき， $k_1 = j_r$ で，さらに， $k_1 - i_1 = \dots = k_n - i_n = l_1 - j_1 = \dots = l_r - j_r = u$ となるノード $k_1, k_2, \dots, k_n$ と $l_1, l_2, \dots, l_r$ を用いると，新たにハブ h_o を置き，必要なら閉曲面に穴を空け，そして h_* を右方向へ u 平行移動させた埋め込みとなる h_o 経由の局所埋め込みを作ることができる．

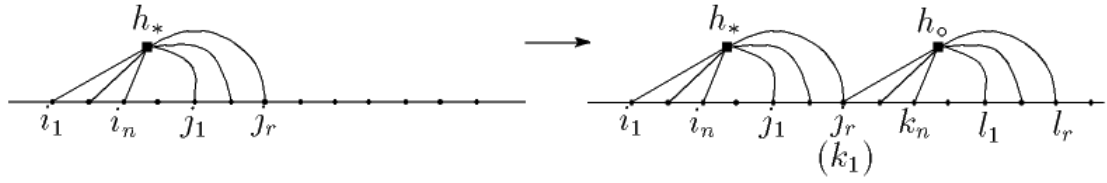


図 1 6

(証明) ハブ h_* が両面ハブであれば命題が成り立つことは明らかである. ハブ h_* は上面ハブとする. h_o と連結しているノードは全て k_1 の右側に位置するので, h_o をノードと考え, エッジ (k_1, h_o) が h_* 経由の局所埋め込みのどのエッジとも交差しないことを示せば十分である. さらに, h_* と連結しているノードは全て j_r の左側に位置するので, h_* をノードと考え, エッジ (h_*, j_r) がエッジ (k_1, h_o) と交差しないことを示せば十分となる. そして命題 2 より (h_*, j_r) と (k_1, h_o) は交差しないように埋め込むことができる. ノード $k_1, k_2, \dots, k_n$ と $l_1, l_2, \dots, l_r$ の配置の条件と定義 3 から, h_o 経由の局所埋め込みは, h_* を右へ u 平行移動させた埋め込みとなる. Q. E. D.

5. D_p 不変な G_{2p} の $g = p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

完全グラフではない場合は, 巡回群 Z_p 不変なグラフについて研究を行えばよいと考えた. K_{14} は $g = 10$ の曲面に埋め込めるが, 少しエッジを減らして, グラフ $G_{2 \times 7}$ のタイプが $G_{14}[14Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 56]$ (D_7 不変) を考えると, これが種数 7 の閉曲面へ Z_7 不変に埋め込み可能であることがわかった. それが図 1 7 である.

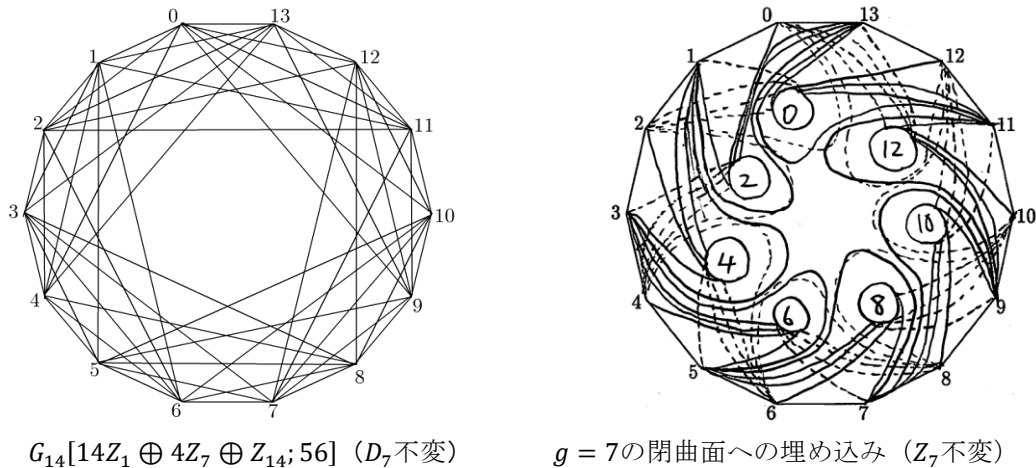


図 1 7

ここで, G_{14} を構成する部分グラフは, $Z_{14}(0, 1, 2, \dots, 13)$, $Z_7(0, 2, 4, \dots, 12)$, $Z_7(0, 4, 8, \dots, 10)$, $Z_7(1, 3, 5, \dots, 13)$, $Z_7(1, 5, 9, \dots, 11)$, と 7 本のエッジ $Z_1(1, 4)$, $Z_1(7, 10)$, $Z_1(13, 2)$, $Z_1(5, 8)$, $Z_1(11, 0)$, $Z_1(3, 6)$, $Z_1(9, 12)$ と 7 本のエッジ $Z_1(1, 6)$, $Z_1(7, 12)$,

$Z_1(13,4)$, $Z_1(5,10)$, $Z_1(11,2)$, $Z_1(3,8)$, $Z_1(9,0)$ である．そこで，これを一般化して定理を示す．

定理 1. p を7以上の素数とする．このとき， $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{2p} で，そのタイプが $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ となるものが存在する．

(証明) 球面を用意し， $2p$ 個のノードを球面上の1つの大円上に $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 2p-1$ と番号の順序に従い並べる．そして p 個の穴を開け，種数 p の閉曲面を作る．穴の番号は， $0, 2, 4, \dots, 2p$ とし，ノードと同じ番号の近くの穴に割り振る．

まず，穴2の周りの局所的な埋め込みを命題5を利用して完成させる．ハブを使った具体的な埋め込みが図18である．以下，この埋め込みを構成する．

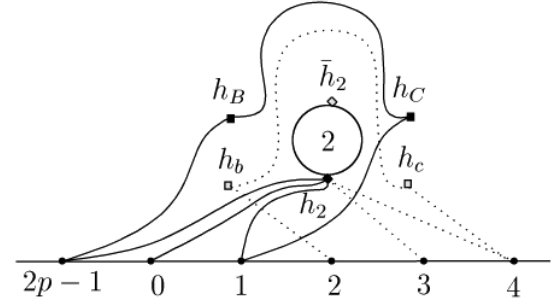


図18 (穴2の周りの埋め込み)

- (1) エッジ $(0,4)$ は $(0-h_2 \dots 4)$ として埋め込む．
- (2) 命題5より，エッジ $(2p-1,3)$ は $((2p-1)-h_2 \dots 3)$ として埋め込む．
- (3) 命題5より，エッジ $(2p-1,4)$ は $((2p-1)-h_2 \dots 4)$ として埋め込む．
- (4) 命題5より，エッジ $(1,4)$ は $(1-h_2 \dots 4)$ として埋め込む．
- (5) エッジ $(2,4)$ は $(2 \dots h_b \dots h_c \dots 4)$ として埋め込む．
- (6) エッジ $(2p-1,1)$ は $((2p-1)-h_B-h_C-1)$ として埋め込む．

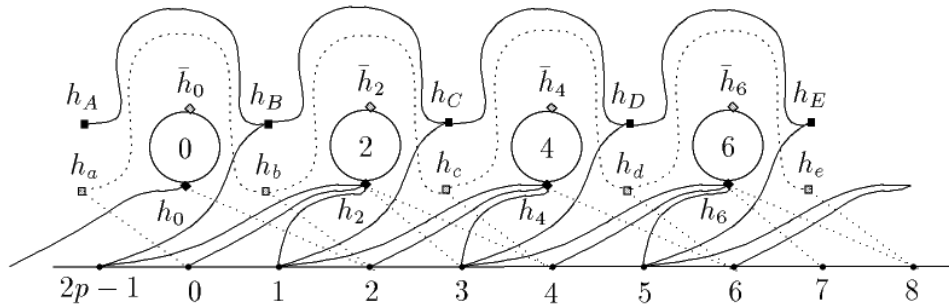


図19

(穴2の周りの各ハブを経由した埋め込みの右方向へ2平行移動させた埋め込み)

以上より，穴2の周りの埋め込みが完成する．そして命題6により，上面に埋め込まれた実線のエッジは，穴2の周りの各ハブを右方向へ2平行移動させた埋め込みとすることがで

きる．必要なら穴4を適当に移動させて穴4の周りの埋め込みとする．同様に，命題6により，下面に埋め込まれた点線のエッジも穴2の周りの各ハブを右方向へ2平行移動させた埋め込みとすることができる．したがって，この平行移動を p 回繰り返すことで，最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる．

同時に， G_{2p} を構成する部分グラフが， $Z_{2p}(0,1,2,\dots,(2p-1))$ ， $Z_p(0,2,\dots,(2p-2))$ ， $Z_p(0,4,\dots,(2p-4))$ ， $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ ， $Z_p(1,5,\dots,(2p-3))$ ， p 本のエッジ $Z_1(1,4)$ ， $Z_1(7,10)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),(2p-2))$ と， p 本のエッジ $Z_1(1,6)$ ， $Z_1(7,12)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),0)$ であることもいえた．これにより， G_{2p} のタイプが $G_{2p}[2pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 8p]$ であることもわかった．

最後に，このグラフ G_{2p} が D_p 不変であることを示す．ノード0と $2p-1$ の間の中点とノード $p-1$ と p の間の中点とを結んだ直線を L とする．直線を L について G_{2p} が対称であれば， G_{2p} は Z_p 対称であることは明らかであるから D_p 不変となる．

直線 L について対称な点があることを示すには $a+b=2p-1$ となる番号 a, b のノードが存在すればよい．明らかに，部分グラフ $Z_{2p}(0,1,2,\dots,(2p-1))$ は直線 L について対称である．そして $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ と $Z_p(0,2,\dots,(2p-2))$ が直線 L について対称である．実際， $Z_p(1,3,\dots,(2p-1))$ の中のエッジ $(2k-1, 2k+1)$ とエッジ $(2(p-k), 2(p-k-1))$ は， $2k-1+2(p-k)=2k+1+2(p-k-1)=2p-1$ より対称である．同様にして， $Z_p(0,4,\dots,(2p-4))$ と $Z_p(1,5,\dots,(2p-3))$ も直線 L について対称である． p 本のエッジ $Z_1(1,4)$ ， $Z_1(7,10)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),(2p-2))$ についてもこの直線 L について対称である．実際， $Z_1(k, (k+3))$ と $Z_1((2p-k-1), (2p-k-4))$ を考えると，

$$k + (2p - k - 1) = (k + 3) + (2p - k - 4) = 2p - 1$$

より対称である．同様にして， p 本エッジ $Z_1(1,6)$ ， $Z_1(7,12)$ ， $\dots$ ， $Z_1((2p-5),0)$ も $Z_1(k, (k+5))$ と $Z_1((2p-k-1), (2p-k-6))$ を考えると

$$k + (2p - k - 1) = (k + 5) + (2p - k - 6) = 2p - 1$$

より対称である．したがって， G_{2p} は D_p 不変である．Q.E.D.

定理1に関連して，以下の予想を立てている．

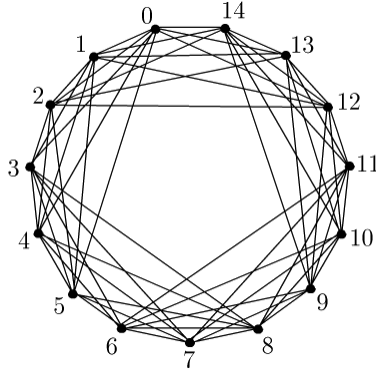
予想1. G_{2p} を $g=p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{2p} の D_p 不変な部分グラフとする($p \geq 7$)．このとき， G_{2p} の総エッジ数 e の最大値は $8p$ である．

6. D_p 不変な G_{3p} の $g=p$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

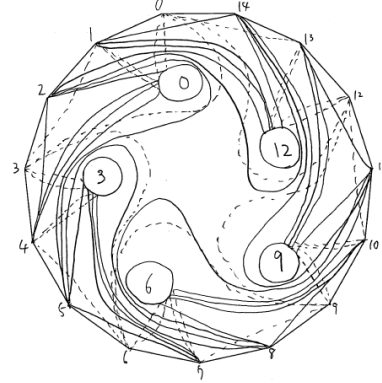
D_p 不変なグラフ G_{2p} の研究の研究に引き続き，完全グラフではない Z_p 不変なグラフ G_{3p} について研究した．

図20は，タイプが $G_{15}[15Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (Z_5 不変) であるグラフを， $g=5$ の閉曲面へ Z_5 不変に埋め込んだ図である． G_{15} を構成する部分グラフは， $Z_{15}(0,1,2,\dots,14)$ ， $Z_{15}(0,2,4,\dots,11,13)$ ， $Z_5(0,3,6,9,12)$ ， $Z_5(1,4,7,10,13)$ ， $Z_5(2,5,8,11,14)$ と5本のエッジ

$Z_1(0,4), Z_1(3,7), Z_1(6,10), Z_1(9,13), Z_1(12,1)$, 5本のエッジ $Z_1(0,5), Z_1(3,8), Z_1(6,11), Z_1(9,14), Z_1(12,2)$ と5本のエッジ $Z_1(1,5), Z_1(4,8), Z_1(7,11), Z_1(10,14), Z_1(13,2)$ である．これを以下の定理2のように一般化できる．



$G_{15}[15Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 60]$ (D_5 不変)



$g = 5$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

図 2 0

定理 2. p を5以上の素数とする．このとき， $g = p$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{3p} で，そのタイプが $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ となるものが存在する．

(証明) 球面を用意し， $3p$ 個のノードを球面上の1つの大円上に $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 3p-1$ と番号の順序に従い並べる．そして p 個の穴を開け，種数 p の閉曲面を作る．穴の番号は， $0, 3, 6, \dots, 3p-3$ とし，ノードと同じ番号の近くの穴に割り振る．

まず，穴0の周りの局所的な埋め込みを命題5を利用して完成させる．ハブを使った具体的な埋め込みが図21である．以下，この埋め込みを構成する．

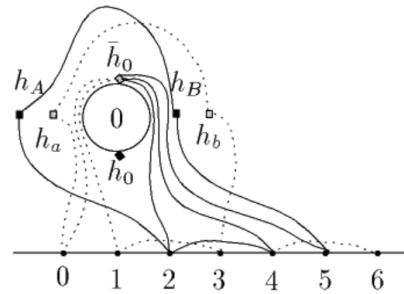


図 2 1

- (1) 4個のノード $0, 2, 4, 6$ を結んだエッジは $(0 \dots \bar{h}_0 - 2 - 4 \dots 6)$ として埋め込む．
- (2) 命題5より，エッジ $(0,4)$ は $(0 \dots \bar{h}_0 - 4)$ として埋め込める．
- (3) 命題5より，エッジ $(0,5)$ も $(0 \dots \bar{h}_0 - 5)$ として埋め込める．
- (4) 命題5より，エッジ $(1,5)$ は $(1 \dots \bar{h}_0 - 5)$ として埋め込める．
- (5) 命題5より，エッジ $(1,4)$ は $(1 \dots \bar{h}_0 \dots 4)$ として埋め込める．
- (6) エッジ $(0,3)$ は $(0 \dots h_a \dots h_b \dots 3)$ として埋め込む．
- (7) エッジ $(2,5)$ は $(2 - h_A - h_B - 5)$ として埋め込む．

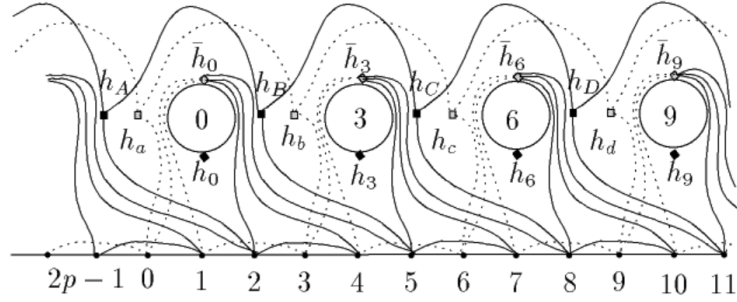


図 2 2

以上より，穴0の周りの埋め込みが完成した．そして命題6により，上面に埋め込まれた実線のエッジは，穴0の周りの各ハブを右方向へ3平行移動させた埋め込みとすることができる．必要なら穴3を適当に移動させて穴3の周りの埋め込みとする．同様に，命題6により，下面に埋め込まれた点線のエッジも穴0の周りの各ハブを右方向へ3平行移動させた埋め込みとすることができる．したがって，この平行移動を p 回繰り返すことで，最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる．

同時に， G_{3p} を構成する部分グラフが， $Z_{3p}(0,1,\dots,(3p-1))$ ， $Z_{3p}(0,2,\dots,(3p-1))$ ， $Z_p(0,3,\dots,(3p-3))$ ， $Z_p(1,4,\dots,(3p-2))$ ， $Z_p(2,5,\dots,(3p-1))$ ， p 本のエッジ $Z_1(0,4)$ ， $Z_1(3,7),\dots,Z_1((3p-3),1)$ と， p 本エッジ $Z_1(0,5)$ ， $Z_1(3,8)$ ， $Z_1(6,11),\dots,Z_1((3p-3),2)$ と， p 本エッジ $Z_1(1,5)$ ， $Z_1(4,8),\dots,Z_1((3p-2),2)$ であることもいえた．これにより， G_{3p} のタイプが $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ であることもわかった．

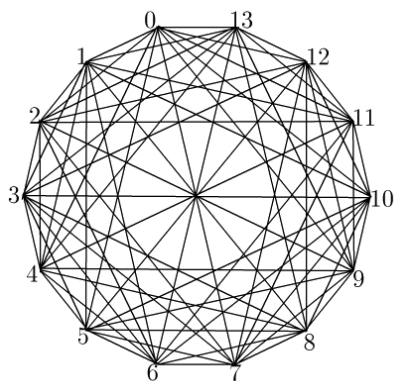
また， G_{3p} が D_p 不変である証明は，定理1と同様にして，ノード0と $3p-1$ の間の中点とノード $\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}$ とを結んだ直線を L とし， L について $G_{3p}[3pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 12p]$ が対称であることから示される．Q.E.D.

定理2に関連して，以下の予想も立てている．

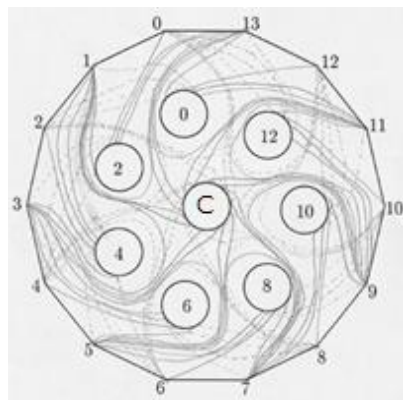
予想 2. G_{3p} を $g = p$ の閉曲面に Z_p 不変に埋め込まれる K_{3p} の D_p 不変な部分グラフとする($p \geq 5$)．このとき， G_{3p} の総エッジ数 e の最大値は $12p$ である．

7. D_p 不変な $G_{\alpha p}$ の $g = p + 1$ の閉曲面への Z_p 不変な埋め込み

節5と節6で扱った埋め込みから，各曲面の中心に穴を増やすことで，エッジ数を増やしても Z_p 不変性を崩さないような $D_{\alpha p}$ 不変なグラフを作ることができるのではないかと考えた．図2.3は， D_7 不変なグラフ $G_{14}[28Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 70]$ の $g = 8$ の閉曲面への Z_7 不変な埋め込みの様子である．



$G_{14}[28Z_1 \oplus 4Z_7 \oplus Z_{14}; 70]$ (D_7 不変)



$g = 8$ の閉曲面への埋め込み (Z_7 不変)

図 2 3

この埋め込みを一般化し定理 1 と同様な手法で、以下に挙げる定理 3 から定理 6 も証明することができた。

定理 3. p を 7 以上の素数とする. このとき, $g = p + 1$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{2p} で, そのタイプが $G_{2p}[4pZ_1 \oplus 4Z_p \oplus Z_{2p}; 10p]$ となるものが存在する.

定理 3 で得られる具体的な G_{2p} を構成する部分グラフは, 定理 1 の証明の中で挙げたものに p 本エッジ $Z_1(1,8), Z_1(3,10), \dots, Z_1((p-1), p+6)$ と p 本エッジ $Z_1(1,10), Z_1(3,12), \dots, Z_1(p-1, p+8)$ を追加したものである. 図 2 4 は, 証明に用いた平行移動する穴 2 と中心に開けた穴 C の周りの埋め込みであり, 各ハブを右方向へ 2 平行移動させた埋め込みとすることができ, さらに, この平行移動を p 回繰り返すことで, 最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる.

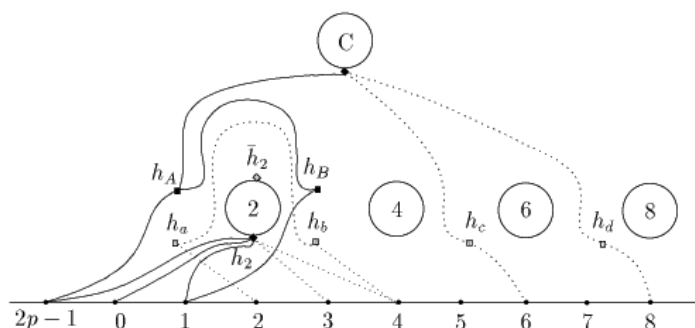
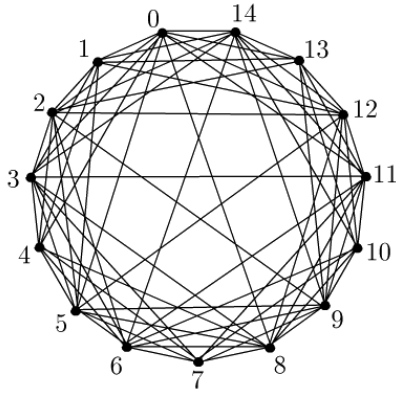
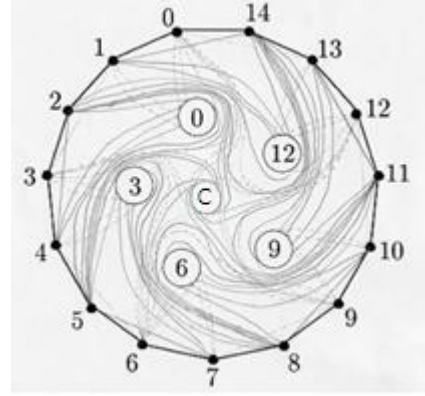


図 2 4

また、図 2 5 は、 G_{15} の形で D_5 不変なグラフ $G_{15}[25Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 70]$ の $g = 6$ の閉曲面への Z_5 不変な埋め込みの様子である．この埋め込みを一般化し定理 2 と同様な手法で、以下の定理 4 を証明することができた．



$G_{15}[25Z_1 \oplus 3Z_5 \oplus 2Z_{15}; 70]$ (D_5 不変)



$g = 6$ の閉曲面への埋め込み (Z_5 不変)

図 2 5

定理 4. p を 5 以上の素数とする．このとき、 $g = p + 1$ の閉曲面へ Z_p 不変に埋め込まれる D_p 不変なグラフ G_{3p} で、そのタイプが $G_{3p}[5pZ_1 \oplus 3Z_p \oplus 2Z_{3p}; 14p]$ となるものが存在する．

定理 4 で得られる具体的な G_{3p} を構成する部分グラフは、定理 2 の証明の中で挙げたものに p 本エッジ $Z_1(2, 6), Z_1(5, 9), \dots, Z_1(p-1, p+3)$ と p 本エッジ $Z_1(2, 9), Z_1(5, 12), \dots, Z_1(p-1, p+6)$ を追加したものである．図 2 6 は、証明に用いた平行移動する穴 0 の周りの埋め込みであり、各ハブを右方向へ 2 平行移動させた埋め込みとすることができ、さらに、この平行移動を p 回繰り返すことで、最終的に得られた埋め込みは Z_p 不変となる．

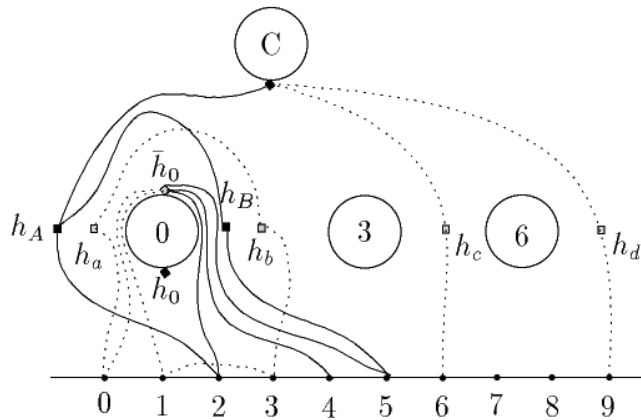


図 2 6

定理 5. p_1 を 5 以上の素数, p_2 を $p_2 \geq p_1$ なる素数とする. このとき, $g = p_2$ の閉曲面へ Z_{p_2} 不変に埋め込まれる Z_{p_2} 不変なグラフ $G_{p_1 p_2}$ で, そのタイプが $G_{p_1 p_2}[2p_2 Z_1 \oplus 2Z_{p_2} \oplus 3Z_{p_1 p_2}; (3p_1 + 4)p_2]$ となるものが存在する.

図 2 7 は, 証明に用いた平行移動する穴 0 の周りの埋め込みであり, 各ハブを右方向へ p_1 平行移動させた埋め込みとすることができ, さらに, この平行移動を p_2 回繰り返すことで, 最終的に得られた埋め込みは Z_{p_2} 不変となる. ただし, ノード 1 と D の間のノード X についても, $(X - h_0 \cdots (X + 2)), (X - h_0 \cdots (X + 3))$ という埋め込みがある.

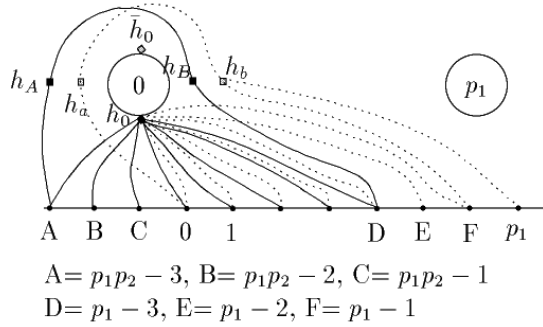


図 2 7

定理 6. p_1 を 5 以上の素数, p_2 を $p_2 \geq p_1$ なる素数とする. このとき, $g = p_2 + 1$ の閉曲面へ Z_{p_2} 不変に埋め込まれる Z_{p_2} 不変なグラフ $G_{p_1 p_2}$ で, そのタイプが $G_{p_1 p_2}[4p_2 Z_1 \oplus 2Z_{p_2} \oplus 3Z_{p_1 p_2}; (3p_1 + 6)p_2]$ となるものが存在する.

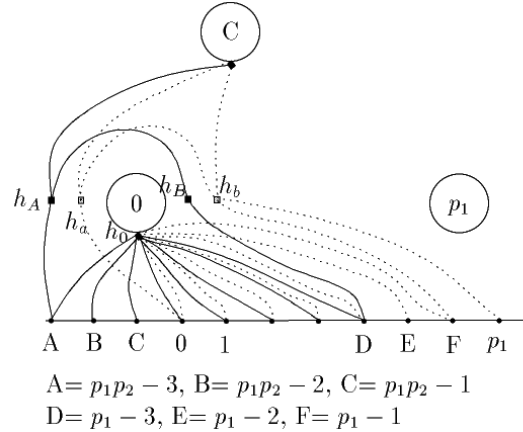


図 2 8

図 2 8 は, 証明に用いた平行移動する穴 0 の周りの埋め込みであり, 各ハブを右方向へ p_1 平行移動させた埋め込みとすることができ, さらに, この平行移動を p_2 回繰り返すことで, 最終的に得られた埋め込みは Z_{p_2} 不変となる. ただし, ノード 1 と D の間のノード X につ

いても, $(X - h_0 \cdots (X + 2)), (X - h_0 \cdots (X + 3))$ という埋め込みがある.

8. 本研究で得られた成果

本研究では, ある種の D_p 不変なグラフに関して埋め込むことができる閉曲面の種数 g を決定するだけでなく, 具体的な $\mathbb{Z}_p$ 不変に埋め込む方法を示したことが成果である. しかし, これらが最低種数であることを示すことはできなかった.

9. 今後の研究の予定

(1) 今回の研究を行なう中で, グラフ自体に表れるエッジの交点数をノードで割った量 (交点密度と呼んでいる) が埋め込む閉曲面の種数と何か関係があるのではないかと考えた. このことについて取り組みたい.

(2) グラフ理論は四色問題とも関係が深いことが知られているので, 今回示した定理を利用して, 埋め込まれたグラフによって閉曲面が何色に塗り分けられるのかについて研究しようとも考えている.

謝辞

本論文に対して, 日本数学教育学会高専・大学部会の先生方から貴重な多くのアドバイスをいただき, とても参考になりました. ここに感謝申し上げます.

参考文献

- [1] 野口健太, 平面グラフ・曲面上のグラフ, オペレーションズ・リサーチ学会, 2016 年, 12 月号, pp. 832-836
- [2] 小舘崇子, グラフの曲面への埋め込みについて, 東京女子大学紀要論集. 科学部門報告 / 東京女子大学学会 編, 第 62 巻, pp. 1931-1942, 2011 年