

複素関数論（数学特論， 5 年選択）の理解のための問題と解説（その 2）

－ 問 題 －

[問題 1] 次のべき級数の収束半径 R を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n-1} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} z^n,$$

[問題 2] $\sin z = 0$ の解は $z = n\pi$ (n は整数) であることを証明せよ。

[問題 3] $\log z = \log|z| + i(\arg z + 2n\pi)$ (n は整数) を用いて, $\log(-i)$ の全ての値を求めよ。

[問題 4] $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ を用いて, 次の数 z について $|z|$ と $\arg z$ を求めよ。

$$(1) z = i^{\frac{1}{3}} \quad (2) z = (-i)^i \quad (3) z = (\sqrt{3} + i)^{1+i}$$

[問題 5] 複素平面全体において, 次の関数の極とその位数をすべて求めよ。

$$(1) \frac{1}{z^2} \quad (2) \frac{1+z}{(1-z)^2(2i+z)^3}$$

[問題 6] 複素平面全体において, 次の関数の極 z_0 とその留数 $\text{Res}(z_0)$ を全て求めよ。

$$(1) \frac{z}{z-i} \quad (2) \frac{z-1}{(z+1)(z+2i)}$$

[問題 7] C を複素平面上の単一曲線とし, D を C の内部領域とすると, 次の複素積分の値を求めよ。

(1) $3i \in D$ のとき

$$\int_C \frac{z}{z-3i} dz$$

(2) $-i \in D$ のとき

$$\int_C \frac{z^3}{(z+i)^2} dz$$

(3) $0, i \in D$ のとき

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2(z-i)} dz$$

[問題 8] 次の関数を部分分数に展開せよ。

$$(1) \frac{1}{x(x+2)(x-2)} \quad (2) \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}$$

[問題 9] 次の公式を用いて, 逆ラプラス変換を求めよ。(公式: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!}, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!} e^{at}$)

$$(1) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s+1)(s-2)}\right] \quad (2) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2(s+1)}\right]$$

－ 解説 と 解答 －

[問題 1] (1) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$

(2) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$

(3) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

(4) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n(n+1)!}{5^{n+1}n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{5} = \infty$

[問題 2] $z = x + iy$ と置く (ただし, x, y は実数). $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$ より, $\sin x \cosh y = 0$, $\cos x \sinh y = 0$ である. $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > 0$ より, $\sin x = 0$ である. したがって, $x = n\pi$ (n は整数) となる. よって, $\cos x = \cos n\pi = \pm 1$ であるので, $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$ となる. したがって, $y = 0$ となる. ゆえに, $z = n\pi$ である.

[問題 3] $\log(-i) = \log|-i| + i(\arg(-i) + 2n\pi) = 0 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

[問題 4] (1) $z = i^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log i} = e^{\frac{1}{3}(\log|i| + i(\arg i + 2n\pi))} = e^{0 + \frac{i}{3}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)} = e^0 e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2n}{3}\pi)}$

よって, $|z| = e^0 = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{6} + \frac{2n}{3}\pi$

(2) $z = (-i)^i = e^{i\log(-i)} = e^{i(\log|-i| + i(\arg(-i) + 2n\pi))} = e^{-\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i(0 + 2n\pi)} = e^{-\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} e^{i(2n\pi)}$

よって, $|z| = e^{-\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$, $\arg z = 2n\pi$

(3) $z = (\sqrt{3} + i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(\sqrt{3}+i)} = e^{(1+i)(\log|\sqrt{3}+i| + i(\arg(\sqrt{3}+i) + 2n\pi))}$
 $= e^{(1+i)(\log 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2n\pi))} = e^{(\log 2 - \frac{\pi}{6} - 2n\pi) + i(\log 2 + \frac{\pi}{6} + 2n\pi)} = e^{(\log 2 - \frac{\pi}{6} - 2n\pi)} e^{i(\log 2 + \frac{\pi}{6} + 2n\pi)}$

よって, $|z| = e^{(\log 2 - \frac{\pi}{6} - 2n\pi)}$, $\arg z = \log 2 + \frac{\pi}{6} + 2n\pi$

[問題 5] (1) $z = 0$ (2 位の極) (2) $z = 1$ (2 位の極), $z = -2i$ (3 位の極)

[問題 6] (1) $\text{Res}(i) = z|_{z=i} = i$ (2) $\text{Res}(-1) = \frac{z-1}{z+2i}\Big|_{z=-1} = \frac{-2}{-1+2i}$, $\text{Res}(-2i) = \frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=-2i} = \frac{-2i-1}{-2i+1} = \frac{3-4i}{5}$

[問題 7] (1) $\int_C \frac{z}{z-3i} dz = 2\pi i \text{Res}(3i) = 2\pi i(z|_{z=3i}) = 2\pi i \times 3i = -6\pi$

(2) $\int_C \frac{z^3}{(z+i)^2} dz = 2\pi i \text{Res}(-i) = 2\pi i((z^3)'|_{z=-i}) = 2\pi i(3z^2|_{z=-i}) = 2\pi i \times (-3) = -6\pi i$

(3) $\int_C \frac{z^2+1}{z^2(z-i)} dz = 2\pi i(\text{Res}(0) + \text{Res}(i)) = 2\pi i\left(\left(\frac{z^2+1}{z-i}\right)' \Big|_{z=0} + \frac{z^2+1}{z^2} \Big|_{z=i}\right) = 2\pi i\left(\frac{z^2-2iz-1}{(z-i)^2} \Big|_{z=0} + 0\right)$
 $= 2\pi i \times (1) = 2\pi i$

[問題 8] (1) $\frac{1}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$ と置くと, $A = \text{Res}(0) = \frac{1}{(x+2)(x-2)} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{4}$,

$B = \text{Res}(-2) = \frac{1}{x(x-2)} \Big|_{x=-2} = \frac{1}{8}$, $C = \text{Res}(2) = \frac{1}{x(x+2)} \Big|_{x=2} = \frac{1}{8}$ である. よって,

$$\frac{1}{x(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{8(x-2)}$$

(2) $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$ と置くと, $A = \text{Res}(-1) = \left(\frac{x}{x-2}\right)' \Big|_{x=1} = \frac{-2}{(x-2)^2} \Big|_{x=1} = -2$,
 $B = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \text{Res}(1) = \frac{x}{x-2} \Big|_{x=1} = -1$, $C = \text{Res}(2) = \frac{x}{(x-1)^2} \Big|_{x=2} = 2$ である。よって,

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2}$$

[問題 9] (1) $\frac{2}{s(s+1)(s-2)} = \frac{-1}{s} + \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$ であるので,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s(s+1)(s-2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2/3}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1/3}{s-2} \right] = -1 + \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$$

(2) $\frac{s-1}{s^2(s+1)} = \frac{2}{s} + \frac{-1}{s^2} + \frac{-2}{s+1}$ であるので,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s-1}{s^2(s+1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2}{s+1} \right] = 2 - t - 2e^{-t}$$