

複素関数論（数学特論，5 年選択）の理解のための問題と解説（その 1）

－ 問 題 －

[問題 1] 複素数 $z = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i$ について以下の問いに答えよ。

- (1) z のノルム $|z|$ を求めよ。
- (2) z の共役 $\bar{z}$ を求めよ。
- (3) z の偏角 θ を求めよ。
- (4) z をネピアの定数 e を用いて表せ。

[問題 2] 2 つの円 $z_1 = 2e^{i\theta_1}$, $z_2 = 3e^{-i\theta_2}$ を考える。このとき, $z = z_1 z_2$ は複素平面上でどのような図形になるか, その式と図形の名前をかけ。

[問題 3] $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とし, スカラー変換 $f_\alpha(z) = \alpha z$ を考える。このとき, 複素平面上で中心が $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, 半径 2 の円 C について, f_α の像 $f_\alpha(C)$ は, どのような図形になるか, その式と図形の名前をかけ。

[問題 4] 複素平面上の反転 $w = g(z) = \frac{1}{z}$ について, 以下の問いに答えよ。ただし, $z = x + iy$, $w = u + iv$ ($x, y, u, v \in \mathbf{R}$) とする。

- (1) $z = 2e^{i\pi/5}$ の $g(z)$ の像のノルムを求めよ。
- (2) $z = 3e^{i\pi/5}$ の $g(z)$ の像の偏角を求めよ。
- (3) 平面上の直線 $x - y = 1$ を複素平面で考えて反転させた式を u, v を用いて表せ。
- (4) 平面上の円 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ を複素平面で考えて反転させた式を u, v を用いて表せ

[問題 5] メビウス変換 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ の不動点 z_1, z_2 に対して, $\kappa = \frac{cz_1+d}{cz_2+d}$ を考えると, κ によって, メビウス変換を 4 つに分類できる。以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円型の不動点の個数と κ の条件を書け。
- (2) 双曲型の不動点の個数と κ の条件を書け
- (3) 残りの 2 つの型名を書け。

[問題 6] 次の 1 次変換の不動点を求め, それらはどの型であるか判断せよ。

- (1) $w = \frac{z}{2z-1}$
- (2) $w = \frac{2z}{3z-1}$
- (3) $w = \frac{3z-4}{z-1}$

[問題 7] 実関数 $f(x, y)$ が調和関数である条件を書け。

[問題 8] 複素数変数 $z = x + yi$ に対して複素関数 $w = u(x, y) + v(x, y)i$ を考えるとき, w が正則関数である必要十分条件を書け。

[問題 9] 正則関数と調和関数の関係を説明せよ。

[問題 10] 次の複素関数は正則関数かどうか判断せよ。

- (1) $w = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y)$
- (2) $w = z\bar{z}$
- (3) $w = (x + y^3) + i(x^2 + y)$
- (4) $w = z^2 + z$

[問題 11] 複素数変数 $z = x + yi$ に対して複素関数 $w = u(x, y) + v(x, y)i$ を考える。 $v = y^3 - 3x^2y$ のとき正則関数を求めよ。

－ 解 説 と 解 答 －

[問題 1] (1) $|z| = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$

(2) $\bar{z} = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}i$

(3) $\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2}}$ より $\theta = \frac{3\pi}{4}$

(4) $z = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

[問題 2] $z = z_1 z_2 = (2e^{i\theta_1})(3e^{-i\theta_2}) = 6e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ より, z は半径 6, 中心が原点の円である。

[問題 3] $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ であり, $C: z = 2e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ より, $f_\alpha(z) = 2e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ より, $f_\alpha(z)$ は半径 2, 中心が $e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ の円である。

[問題 4] (1) $g(z) = \frac{1}{2}e^{-i\pi/5}$ より像 $g(z)$ のノルムは $\frac{1}{2}$ である。

(2) $z = 3e^{i\pi/5}$ の $g(z) = \frac{1}{3}e^{-i\pi/5}$ の像 $g(z)$ の偏角は $-\frac{\pi}{5}$ である。

(3) $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ より, 直線 $x - y = 1$ は $\frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{z-\bar{z}}{2i} = 1$ である。 $w = \frac{1}{z}, \bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$ より, $\frac{w+\bar{w}}{2} + \frac{\bar{w}-w}{2i} = w\bar{w}$ を得る。これより, $u - v = u^2 + v^2$ を得る。

(4) 円 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ は $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ であり, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}, x^2 + y^2 = z\bar{z}$ より, $z\bar{z} - 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = 0$ である。 $w = \frac{1}{z}, \bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$ より, $1 - 2\left(\frac{w+\bar{w}}{2}\right) - 2\left(\frac{\bar{w}-w}{2i}\right) = 0$ を得る。これより, $2u + 2v = 1$ を得る。

[問題 5] (1) 楕円型は, 不動点の個数が 2 で, κ の条件は $|\kappa| = 1$ である。

(2) 双曲型は, 不動点の個数が 2 で, κ の条件は k が正の実数 ($k \neq 1$) となることである。

(3) 残りの 2 つの型名は, 斜航型と放物型である。

[問題 6] (1) $\frac{z}{2z-1} = z$ を解いて, 不動点は $z = 0, 1$ である。 $\kappa = \frac{-1}{2-1} = -1$ であるので $|\kappa| = 1$ であり, これは楕円型である。

(2) $\frac{2z}{3z-1} = z$ より, 不動点は $z = 0, 1$ である。 $\kappa = \frac{-1}{3-1} = -\frac{1}{2}$ であるので, これは斜航型である。

(3) $\frac{3z-4}{z-1} = z$ より, 不動点は $z = 2$ である。よって, これは放物型である。

[問題 7] 実関数 $f(x, y)$ が調和関数である条件は, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ である。

[問題 8] $w = u + iv$ が正則関数である必要十分条件は, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ である。

[問題 9] $w = u + iv$ が正則関数であるならば, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ であるが,

これより, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ であることと, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ であるため,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ と $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ が成り立つ。これは u も v も調和関数であることを意味する。

[問題 10] (1) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $v = 2xy + 2y$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$ が成り立つので, w は正則関数である。

(2) $w = z\bar{z} = x^2 + y^2$ であり, $u = x^2 + y^2$, $v = 0$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ であるので, w は正則関数ではない。

(3) $u = x^2 + y^3$, $v = x^2 + y$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ であるので, w は正則関数ではない。

(4) $w = z^2 + z = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$ であり, $u = x^2 - y^2 + x$, $v = 2xy + y$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$ が成り立つので, w は正則関数である。

[問題 11] $v = y^3 - 3x^2y$ より $\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2$ であり, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ でなければならないことから,

$$u = 3xy^2 - x^3 + \varphi(y)$$

が得られる。一方, $-\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + \frac{d\varphi(y)}{dy}$ であり, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ でなければならないことから,

$\varphi(y) = c$ (c は任意定数) である。よって, $u = 3xy^2 - x^3 + c$ である。したがって,

$$w = (3xy^2 - x^3 + c) + i(y^3 - 3x^2y)$$

である。ところで, $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ であるから,

$$w = -z^3 + c$$

となる。