

ローラン展開と部分分数展開

1. ローラン展開

【テーラー展開】 $f(z)$ が領域 D で正則なとき、 $f(z)$ は点 $z_0 \in D$ の周りで、

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

と表すことができる。

* $z = 0$ での $f(z)$ のテーラー展開をマクローリン展開と呼ぶ。

【ローラン展開】 $f(z)$ が $z_0 \in D$ 以外で正則で、 z_0 が n 位の極であるとき、 $f(z)$ は点 $z_0 \in D$ の周りで、

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

と表すことができる。このとき、

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

である。

$f(z)$ のローラン展開において、

$$\sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

を、 $f(z)$ の主要部という。特に、 a_{-1} は z_0 の留数 $\text{Res}(z_0)$ である。

(例 1) 複素関数 $f(z) = \frac{z^2+2}{(z-i)^3}$ の $z = i$ におけるローラン展開の主要部を求めよ。

[解答]

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-i)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-i)^2} + \frac{a_{-1}}{z-i} + \dots$$

と置く。それぞれの複素積分を、留数定理を用いて計算すると、

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2+2}{(z-i)^3} dz = \text{Res}(i) = \frac{(z^2+2)''}{2!} \Big|_{z=i} = \frac{2}{2!} \Big|_{z=i} = 1$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2+2}{(z-i)^2} dz = \text{Res}(i) = (z^2+2)' \Big|_{z=i} = 2z \Big|_{z=i} = 2i$$

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-i)^{-2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2+1}{(z-i)^1} dz = \text{Res}(i) = \text{Res}(z^2+2) \Big|_{z=i} = 1$$

よって、主要部は、

$$\frac{1}{(z-i)^3} + \frac{2i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i}$$

である。

2. 部分分数展開

【部分分数展開】 $f(x)$ は正則関数とする。

$$\frac{f(x)}{(z-a)^n} = \frac{a_n}{(z-a)^n} + \frac{a_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z-a}$$

とすると、右辺は、 $\frac{f(x)}{(z-a)^n}$ のローラン展開の主要部である。

(例2)

$$\frac{z}{(z+1)(z-1)^3} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} + \frac{D}{(z-1)^3}$$

とおいたとき、 A, B, C, D を決定せよ。

[解答] $z = -1$ の留数が A であるので、

$$A = \text{Res}(0) = \frac{z}{(z-1)^3} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{8}$$

である。同様に、 $z = 1$ の留数が B であるので、

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(z+1)(z-1)^3} dz = \text{Res}(1) = \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{z+1} \right)'' \Big|_{z=1} = -\frac{1}{(z+1)^3} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{8}$$

である。残りはローラン展開の定理より、

$$C = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(z+1)(z-1)^2} dz = \text{Res}(1) = \frac{1}{1!} \left(\frac{z}{z+1} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=1} = \frac{1}{4}$$

$$D = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(z+1)(z-1)} dz = \text{Res}(1) = \frac{1}{0!} \left(\frac{z}{z+1} \right) \Big|_{z=1} = \frac{1}{(z+1)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

となる。

(例3) 複素関数 $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-2)}$ の $z = 0$ におけるローラン展開を求めよ。

[解答] $f(z)$ の部分分数展開

$$f(z) = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}$$

を考える。

$$A = \text{Res}(2) = \frac{z+2}{z^2} \Big|_{z=2} = 1, \quad B = \text{Res}(0) = \left(\frac{z+2}{z-2} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{-4}{(z-2)^2} \Big|_0 = -1$$

$$C = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z+2}{z(z-2)} dz = \text{Res}(0) = \frac{z+2}{z-2} \Big|_{z=0} = -1$$

よって、

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

したがって、 $\frac{1}{z-2}$ のマクローリン展開を考えれば、 $f(z)$ の $z = 0$ におけるローラン展開は、

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots \right)$$

となる。

演習 次の問いに答えよ。

(1)

$$\frac{z+1}{(z+2)(z-1)^3} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} + \frac{D}{(z-1)^3}$$

とおいたとき, A, B, C, D を決定せよ。

(2) 複素関数 $f(z) = \frac{z-12}{z^2(z-3)}$ の $z=0$ におけるローラン展開を求めよ。

[1] 次のべき級数の収束半径を求めよ。(各 5 点) (1) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$ [2] $\cos z = 0$ を解け。(5 点) [3] $\log z = \log z + i(\arg z + 2n\pi)$ (n は整数), $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ を用いて, 次の数 z について z と $\arg z$ を求めよ。(各 5 点) (1) $z = \log(2 + \sqrt{3}i)$ (2) $z = i^{\frac{1}{3}}$ (3) $z = (-i)^i$ (4) $z = (2+i)^{1+i}$ [4] 次の関数の極とその位数をすべて求めよ。(各 5 点) (1) $\frac{1}{z^2}$ (2) $\frac{1+z}{(1-z)^2(2i+z)^3}$ [5] 次の関数の極の留数を全て求めよ。(各 5 点) (1) $\frac{z}{z-i}$ (2) $\frac{z-1}{(z+1)(z+2i)}$	[6] 次の複素積分の値を求めよ。(各 5 点) (1) $3i \in D = \text{In}(C)$ のとき, $\int_C \frac{z}{z-3i} dz$ (2) $-i \in D = \text{In}(C)$ のとき, $\int_C \frac{z^2}{(z+i)^3} dz$ (3) $0, i \in D = \text{In}(C)$ のとき, $\int_C \frac{z^2+1}{z^2(z-i)} dz$ [7] 次の関数を部分分数に展開せよ。(各 5 点) (1) $\frac{1}{x(x+2)(x-2)}$ (2) $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ [8] 次の逆ラプラス変換を求めよ。(各 5 点) ただし, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!}, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!} e^{at}$ (1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s-2)}\right]$ (2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2(s+1)}\right]$
---	--