

複素積分と留数定理

1. 微分積分の基本定理 ($f(x) = F'(x)$ の定積分は $F(x)$ の $D = [a, b]$ の端点 (境界) a, b の値で定まるという定理)

【微分積分の基本定理】

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)$$

2. グリーンの定理 (dw の面積分は w の境界の積分で定まるという定理)

$$w = Pdx + Qdy, \quad dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \text{ とすると,}$$

【グリーンの定理】

$$\int_C w = \int_D dw$$

ここで, C は単一曲線で, $D = \text{In}(C)$ である。また,

$$dw = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy$$

である。

* 微分形式 $dx \wedge dy$ のルール (向きを考えた微分)

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy$$

3. 複素積分は複素平面上の単一曲線 C 上で考える。

(注意) グリーンの定理から, 複素平面上の関数 $f(z)$ の C 上の積分は, C の内部 $D = \text{In}(C)$ にも影響を受ける。 D に $f(z)$ の発散するような点 $z = a$ がある場合, どうするかを考えなくては行けない。

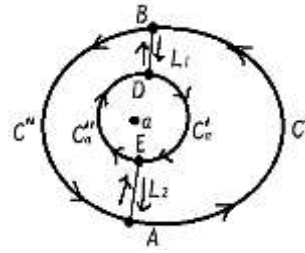
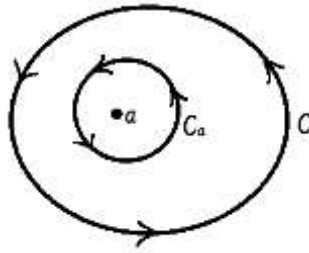
【定理 1】 $f(z)$ は $D = \text{In}(C)$ 内で正則とすると,

$$\int_C f(z) dz = 0$$

(証明) 微分積分学の基本定理より明らか。

【定理 2】 $a \in D = \text{In}(C)$, $f(z)$ は D で正則のとき

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$



(証明) $C_a: z = \varepsilon e^{i\theta} + a$ と置く。図より $C' + L_1 - C'_a + L_2 - L_2 + C''_a - L_1 + C'' = C - C_a$ より,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_a} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

である。 $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ より,

$$\int_{C_a} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta} + a) d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta} + a) d\theta = 2\pi i f(a)$$

よって, $\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ である。

一般に, 以下が成り立つ。(証明は略す。)

【定理 3】 $a \in D$, $f(z)$ は $D = \text{In}(C)$ で正則のとき

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

【定義】 $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ において, a を孤立特異点といい, $\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$ を a の留数といい, **Res(a)** と書く。また, a を n 位の極という

定理 3 を言葉で書くと,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = 2\pi i \times (a \text{ の留数})$$

4. 留数定理

定理 3 を応用して次の定理が得られる。

【留数定理】 $f(z)$ は $D = \text{In}(C)$ で $a_k (k = 1, \dots, r)$ 以外で正則のとき

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \times (a_k \text{ の留数の和})$$

(例 1) $3 \in D = \text{In}(C)$ のとき, 次の複素積分の値を求めよ。

$$\int_C \frac{z^2}{z-3} dz$$

[解答]

孤立特異点 $z = 3$ は 1 位の極であって, その留数は, $\text{Res}(3) = z^2|_{z=3} = 9$ である。よって,

$$\int_C \frac{z^2}{z-3} dz = 2\pi i \times 9 = 18\pi i$$

(例2) $3 \in D = \text{In}(C)$ のとき, 次の複素積分の値を求めよ。

$$\int_C \frac{z^2}{(z-3)^3} dz$$

[解答]

孤立特異点 $z=3$ は3位の極であって, その留数は, $\text{Res}(3) = (z^3)''|_{z=3} = 2|_{z=3} = 2$ である。
よって,

$$\int_C \frac{z^2}{(z-3)^3} dz = 2\pi i \times \frac{2}{2!} = 2\pi i$$

(例3) $0, i \in D = \text{In}(C)$ のとき, 次の複素積分の値を求めよ。

$$\int_C \frac{2z^3 + i}{z(z-i)^2} dz$$

[解答]

孤立特異点 $z=0$ は1位の極であって, その留数は, $\text{Res}(0) = \frac{2z^3+i}{(z-i)^2} \Big|_{z=0} = -i$ である。

また, 孤立特異点 $z=i$ は2位の極であって, その留数は, $\text{Res}(i) = \left(\frac{2z^3+i}{z} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{4z^3-i}{z^2} \Big|_{z=i} = 5i$ である。よって,

$$\int_C \frac{2z^3 + i}{z(z-i)^2} dz = 2\pi i \times (-i + 5i) = -8\pi$$

演習 次の複素積分の値を求めよ。

(1) $2i \in D = \text{In}(C)$ のとき,

$$\int_C \frac{z}{z-2i} dz$$

(2) $2i \in D = \text{In}(C)$ のとき,

$$\int_C \frac{z^4}{(z-2i)^3} dz$$

(3) $0, -i \in D = \text{In}(C)$ のとき,

$$\int_C \frac{z^4 + i}{z^2(z+i)} dz$$