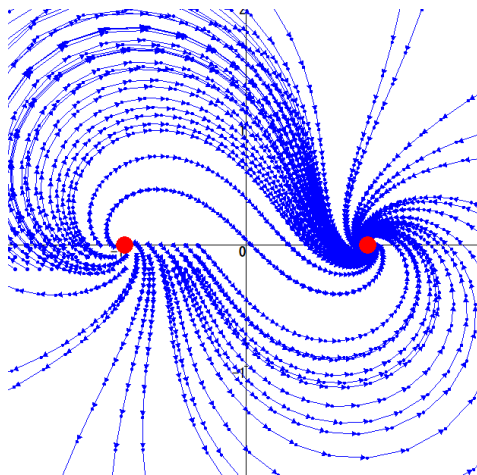


メビウス変換について



複素平面上のメビウス変換は

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

という式で与えられる。そして $f(z) = z$ を満たす点を **不動点** という。不動点 z は、2 次方程式 $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ から得られるので、その個数は 1 か 2 である。

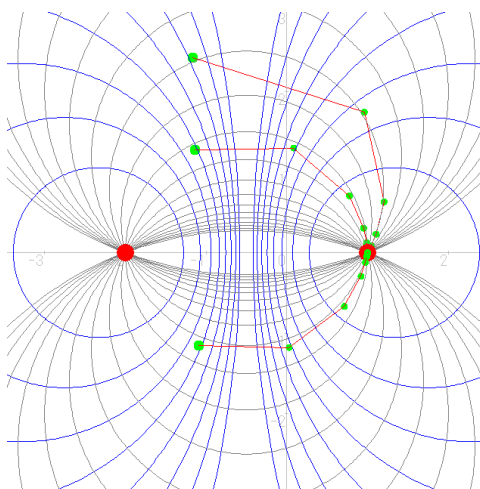
不動点 z_1, z_2 に対して

$$\kappa = \frac{cz_1 + d}{cz_2 + d}$$

を考えると、 κ によって、メビウス変換を分類できることが知られている。

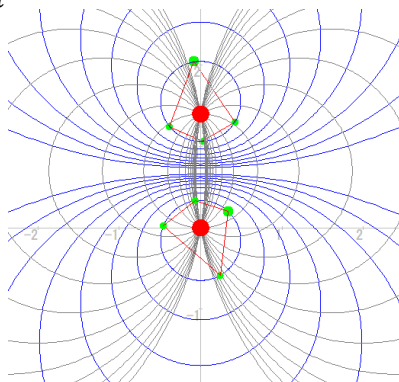
- (1) **双曲型**： 2つの不動点 z_1, z_2 をもち、 κ が**正の実数になるもの**で、2つの固定点を通る円に沿って動く。さらに、片方が反発的不動点，もう片方が吸引的不動点である。

$$f(z) = \frac{3z + 2}{z + 4}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = -2, \quad \kappa = 2.5$$



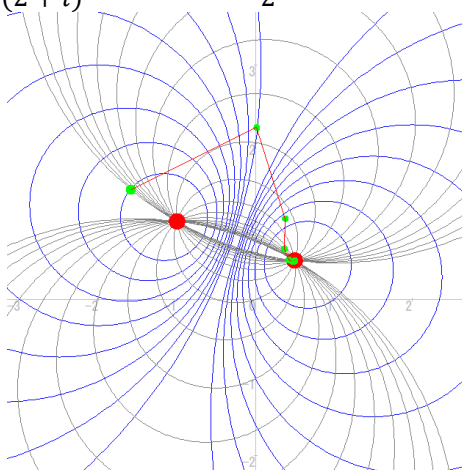
- (2) **楕円型**：2つの不動点 z_1, z_2 をもち、 κ が絶対値1の複素数になるもので、 z_1, z_2 に関するアポロニウスの円に沿って動く。そして、 z_1, z_2 はどちらも中立的な不動点である。

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{\sqrt{2}z + 1 - i}, \quad z_1 = \sqrt{2}i, \quad z_2 = 0, \quad \kappa = i$$



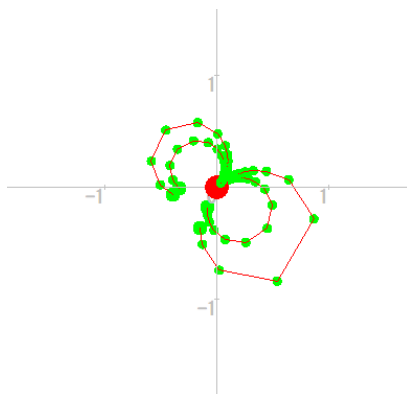
- (3) **斜航型**：2つの不動点 z_1, z_2 をもち、双曲型でも楕円型でもないもの。点の軌跡は反発的固定点かららせん状に出て行き、吸引的固定点に吸い込まれていく。

$$f(z) = \frac{(2i)z + (1+i)}{(1+i)z + (2+i)}, \quad z_1 = \frac{1+i}{2}, \quad z_2 = -1+i, \quad \kappa = 2-2i$$



- (4) **放物型**：固定点は1つだけのタイプ。固定点は反発的でもあり吸引的でもある。

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{z + (1+i)}, \quad z_1 = z_2 = 0, \quad \kappa = 1$$



問題 次の1次変換の不動点を求め、それらはどの型であるか判断せよ。

$$(1) \quad w = \frac{z}{2z-1}, \quad (2) \quad w = \frac{2z}{3z-1}, \quad (3) \quad w = \frac{3z-4}{z-1}, \quad (4) \quad w = \frac{z}{z+2}$$

<補足説明>

メビウス変換の種類は、放物型(parabolic)、楕円型(elliptic)、双曲型(hyperbolic)、斜航型(loxodromic)に分けられることを述べたが、これらの名前は2次曲線の分類に由来する。すなわち、2次曲線の離心率を e としたとき、 $e = 1$ のときを parabolic というが、これはギリシア語の“比較”を意味する。そして $0 \leq e < 1$ が“不足”である elliptic であり、 $e > 1$ が“過剰”である hyperbolic である。では、メビウス変換では、比較、不足、過剰の意味はどのようにになっているのだろうか。

メビウス変換

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

を行列

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対応させる。これによって、メビウス変換のタイプが、 $\det H = 1$ の場合で分類できることが知られている。それは、 H のトレース $\text{tr}H = a + d$ で以下のように分類される。

- (1) 放物型(parabolic, 比較) : $(\text{tr}H)^2 = 4$
- (2) 楕円型(elliptic, 不足) : $0 \leq (\text{tr}H)^2 < 4$
- (3) 双曲型(hyperbolic, 過剰) : $(\text{tr}H)^2 > 4$
- (4) 斜航型(loxodromic : $(\text{tr}H)^2 \in \mathbb{C}, \quad (\text{tr}H)^2 \notin [0,4]$