

$w = \frac{1}{z}$ 変換

z 平面上の円と $w = \frac{1}{z}$ 変換後の図形の比較

定理. z 平面上の半径 r , 中心 z_0 の円 $z = re^{i\theta} + z_0$ は, $d = r^2 - z_0\bar{z}_0 \geq 0$ と置くと, $w = 1/z$ 変換で以下のように変換される。

(1) $d \neq 0$ のとき, $w = (re^{i\theta} - \bar{z}_0)/d$ である。これは, w 平面上の半径 r/d , 中心 $-\bar{z}_0/d$ の円を意味する。

(2) $d = 0$ のとき, $z_0w + \bar{z}_0\bar{w} = 2$ である。これは, w 平面上の直線を意味する。

(証明) $z_0 = b + ci$ と置くと, $d = r^2 - b^2 - c^2$ であり, z 平面上の円は xy 平面上では

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = b^2 + c^2 + d$$

となる。これは, $x^2 + y^2 - 2bx - 2cy = d$ より $\lambda = b - ci$ と置くことで,

$$z\bar{z} - \lambda z - \bar{\lambda}\bar{z} = d$$

となる。この円を $1/z$ 変換したとき, w 平面上では,

$$dw\bar{w} + \bar{\lambda}w + \lambda\bar{w} = 1$$

となる。 $w = u + iv$ とすると, uv 平面上では

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv = 1$$

となる。

$d \neq 0$ のときは,

$$\left(u^2 + \frac{b}{d}u\right) + \left(v^2 - \frac{c}{d}v\right) = \frac{1}{d}$$

であるので,

$$\left(u + \frac{b}{d}\right)^2 + \left(v - \frac{c}{d}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 + d}{d^2}$$

を得る。これは, 半径を r' , 中心を w_0 とすると,

$$r' = \frac{r}{d}, \quad w_0 = -\frac{b}{d} + \frac{c}{d}i = -\frac{\bar{z}_0}{d}$$

の円を意味する。

$d = 0$ のときは,

$$bu - cv = 1$$

を得る。これは, $z_0w + \bar{z}_0\bar{w} = 2$ を表す。

例

(1) z 平面上の円 $z = 3e^{i\theta} + 1 + \sqrt{3}i$ を考える。これは、半径 $r = 3$ 、中心 $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$ の円であり、 $d = r^2 - z_0\bar{z}_0 = 9 - 4 = 5$ である。したがって、 $w = 1/z$ 変換でこの円は、

$$w = \frac{3e^{i\theta} - (1 - \sqrt{3}i)}{5}$$

に変換される。

(2) z 平面上の円 $z = 2e^{i\theta} - \sqrt{3} + i$ を考える。これは、半径 2 、中心 $z_0 = -\sqrt{3} + i$ の円であり、 $d = r^2 - z_0\bar{z}_0 = 4 - 4 = 0$ である。したがって、 $w = 1/z$ 変換でこの円は直線

$$(-\sqrt{3} + i)u + (-\sqrt{3} - i)v = 2$$

に変換される。

4. 練習

次の円を、 $w = 1/z$ 変換で変換せよ。

(1) z 平面上の円 $z = e^{i\theta} + 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

(2) z 平面上の円 $z = 3e^{i\theta} + 3e^{i(\frac{2\pi}{3})}$