

調和関数とコーシー・リーマンの関係式

調和関数 $f = f(x, y)$ は、理工学において重要な微分方程式

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = 0$$

を満たすものである。ここで、 Δ はラプラス作用 (ラプラシアン) で、 $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$ を意味する。ラプラス方程式 $\Delta f = 0$ は、時間 t が含まれていないため、 t によって変化しない定常状態を表す方程式である。

$\text{grad } f$ は f の勾配ベクトル場を表し、 $\text{div } \mathbf{A}$ はベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散を表すので、 $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = 0$ は、 f の勾配方向の発散が 0 ということである。

山に例えていえば、 $f = f(x, y)$ は山の形をあらわしており、 $\text{grad } f$ は山から物が転がる方向から得られるベクトル場である。そして、 $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$ はベクトル場 $\text{grad } f$ の流出量 (流出と流入の差) または膨張量を意味する。したがって、 $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = 0$ となる関数 $f = f(x, y)$ は、その勾配ベクトル場においては非圧縮的であるものという意味がある。

Δ に関する方程式

(例 1) 波動方程式 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \Delta u$ (弦の振動, 膜の振動)

(例 2) ポアソン方程式 $\Delta u = f$ (電磁気学, 流体力学の基礎方程式)

$z = x + iy$ とし、複素関数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ を考える。
 w が微分可能ということは、 $y = 0$ のとき、

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$x = 0$ のとき、

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

である。よって、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

が得られる。最後の式を、コーシー・リーマンの関係式という。

コーシー・リーマンの関係式を満たす $w = f(z)$ を正則関数という。

$w = f(z)$ が正則関数であるならば、コーシー・リーマンの関係式から、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ であるが、これより、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

であるため、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

が得られる。これは、 $u(x, y)$ も $v(x, y)$ も調和関数であることを意味する。

例題： $v = 3x^2y - y^3$ から正則関数 w を作れ。

解答： $v = 3x^2y - y^3$ より $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ であり， $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ でなければならないことから，

$$u = x^3 - 3xy^2 + \varphi(y)$$

が得られる。一方， $-\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + \frac{d\varphi(y)}{dy}$ であり， $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ でなければならないことから， $\varphi(y) = c$ (c は任意定数) である。よって， $u = x^3 - 3xy^2 + c$ である。したがって，

$$w = (x^3 - 3xy^2 + c) + i(3x^2y - y^3)$$

である。ところで， $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ であるから，

$$w = z^3 + c$$

となる。

問題：複素数変数 $z = x + yi$ に対して複素関数 $w = u(x, y) + v(x, y)i$ を考える。 $v = 2xy$ のとき正則関数を求めよ。