

## 「三角関数の合成 2」

—— 応用へのイメージ ——

高木 和久（高知高専），松田 修（津山高専）

### 【基礎知識】

[1] 平面上の点  $P(x_0, y_0)$  と原点を通る直線  $l: ax + by = 0$  の距離  $d$  を求めるための便利な公式は、

$$d = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である．特に、

$$\tilde{d} = \frac{ax_0 + by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

と置くと、 $P$  が  $ax + by > 0$  の位置にあれば  $\tilde{d} > 0$  であり、 $P$  が  $ax + by < 0$  の位置にあれば  $\tilde{d} < 0$  となる． $\tilde{d}$  を点  $P$  と直線  $l$  の符号付き距離という．

[2] 三角関数の合成式  $a \cos \theta + b \sin \theta$  を考える．この式を

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \frac{a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta + b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

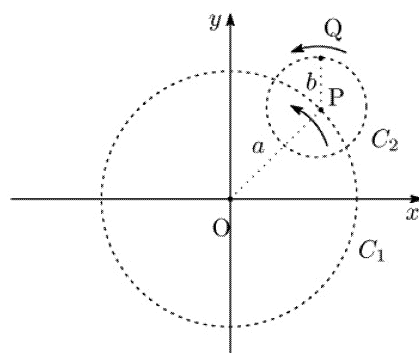
と変形し、上式 (1) と見比べると、 $a \cos \theta + b \sin \theta$  は、点  $P(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta)$  と直線  $l: ax + by = 0$  の符号付き距離を与えていることがわかる．

**注意 1!** 点  $P$  は中心が原点の半径  $\sqrt{a^2 + b^2}$  の円上の点である．

**注意 2!** 三角形の合成については、 $a \sin \theta + b \cos \theta$  で表記する場合もある．しかし、ここでは、点  $P(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta)$  の座標のイメージを重視するために、 $a \cos \theta + b \sin \theta$  として扱う．

### 【問題】

点  $P$  は原点  $O$  を中心とする半径  $a$  の円  $C_1$  を角速度  $w$  で反時計まわりに運動し、点  $Q$  は、点  $P$  を中心とする半径  $b$  の円  $C_2$  を、やはり  $P$  と同じ角速度  $w$  で反時計まわりに運動している．点  $P$  の初期位相は  $0$  とし、点  $Q$  の初期位相は  $\pi/2$  とする．



- (1) 点  $Q$  の運動の  $t$  秒後の位置  $(x, y)$  を, 三角関数を使って表せ.
- (2) 点  $Q$  の運動の軌跡を図示せよ.
- (3) (2) の図を用いて, 方程式  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) の解は, 高々2つあることを説明せよ. すなわち, どのようなときに解が2つで, どのようなときに解が1つで, どのようなときに解がないのかを述べよ.
- (4) (2) の図を用いて, 不等式  $a \cos \theta + b \sin \theta \geq c$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) の解である範囲を説明せよ.
- (5) 不等式  $a \cos \theta + b \sin \theta \geq c$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) は, 現実的にこういった問題に応用可能なのかを議論せよ.

【練習問題】 次の方程式, 不等式を解け. 解は電卓等を使って小数第1位まででよい.

- (1)  $2 \cos \theta + \sin \theta = -2$
- (2)  $\cos \theta - 3 \sin \theta < 5$

【ねらい】 三角関数の合成の物理的なイメージとその応用をイメージする.

【参考文献】

(T1) 「点と直線の符号付き距離を用いた三角方程式・不等式の新解法」 高木和久 (本 webpage 内)