

同一の図を用いた加法定理と積和公式の証明

たかぎかずひさ
高木和久

§ 0. はじめに

三角関数の積和公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \dots ①$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \dots ②$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \dots ③$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \dots ④$$

は, 通常は加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots ⑤$$

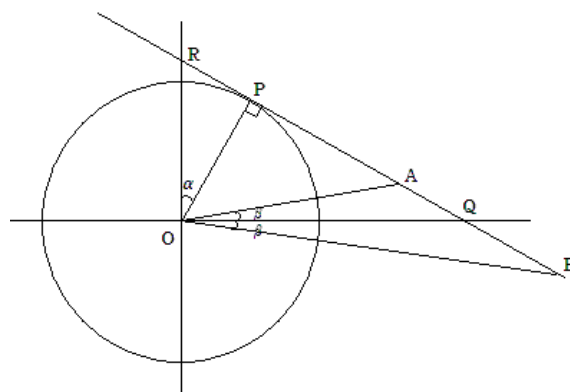
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots ⑥$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots ⑦$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots ⑧$$

を用いて証明されるが, これらの 8 つの等式は, 実は同一の図を用いて証明することができる。

以下に $0 < \beta < \alpha, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ の場合の証明を与える。単位円上に点 P をとり, 点 P における円の接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ Q, R とする。この接線上に 2 点 A, B を $\angle AOQ = \angle QOB = \beta$ となるようにとる。



§ 1. ⑤, ⑥の証明

§ 1 ~ § 3 では $\angle POR = \alpha$ とする。このとき点 P の座標は $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ となるから接線の方程式は

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1$$

である。

$\angle PAO = \alpha + \beta$ であるから

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{OP}{AO} = \frac{1}{AO}$$

$\angle PBO = \angle PQO - \beta = \alpha - \beta$ であるから

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{OP}{BO} = \frac{1}{BO}$$

点 A の座標は $(AO \cos \beta, AO \sin \beta)$ であるから $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1$ に代入して

$$AO \cos \beta \sin \alpha + AO \sin \beta \cos \alpha = 1$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{AO}$$

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 点 B の座標は $(BO \cos \beta, -BO \sin \beta)$
 であるから $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1$ に代入して

$$BO \cos \beta \sin \alpha - BO \sin \beta \cos \alpha = 1$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{BO}$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

§ 2. ①の証明

OQ は $\angle AOB$ の二等分線であるから
 $AQ : QB = AO : BO$ である。つまり Q
 は線分 AB を $AO : BO$ の比に内分し

ている。Q の x 座標は $\frac{1}{\sin \alpha}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} &= \frac{BO \cdot AO \cos \beta + AO \cdot BO \cos \beta}{AO + BO} \\ &= \frac{2 AO \cdot BO \cos \beta}{AO + BO} \end{aligned}$$

両辺を $\cos \beta$ で割ると

$$\frac{1}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{2 AO \cdot BO}{AO + BO}$$

逆数をとって

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{AO + BO}{AO \cdot BO} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{AO} + \frac{1}{BO} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

§ 3. ②の証明

三角形 ARO と三角形 BRO の面積
 の比は $AR : RB$ に等しいが、この比は
 RO を底辺としたときの高さの比

$AO \cos \beta : BO \cos \beta = AO : BO$
 に等しい。つまり R は線分 AB を
 $AO : BO$ の比に外分している。

R の y 座標は $\frac{1}{\cos \alpha}$ であるから

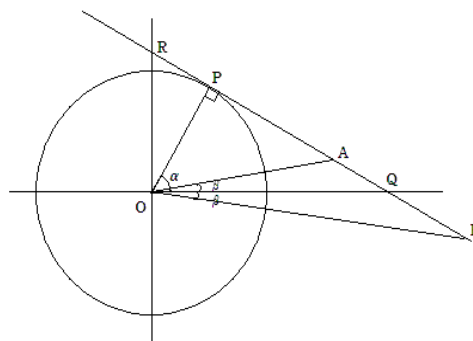
$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{BO \cdot AO \sin \beta - AO \cdot (-BO \sin \beta)}{-AO + BO} \\ &= \frac{2 AO \cdot BO \sin \beta}{BO - AO} \end{aligned}$$

両辺を $\sin \beta$ で割ると

$$\frac{1}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{2 AO \cdot BO}{BO - AO}$$

逆数をとって

$$\begin{aligned} \therefore \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{BO - AO}{AO \cdot BO} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AO} - \frac{1}{BO} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$



§ 4. ⑦,⑧の証明

§ 4 ~ § 6 では $\angle POQ = \alpha$ とする。
 このとき点 P の座標は $(\cos \alpha, \sin \alpha)$
 となるから接線の方程式は

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$$

である。

$$\angle PAO = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \text{ であるから}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{OP}{AO} = \frac{1}{AO}$$

$\angle PBO = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ であるから

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{BO} = \frac{1}{BO}$$

点 A の座標は $(AO \cos \beta, AO \sin \beta)$ であるから $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$ に代入して

$$AO \cos \beta \cos \alpha + AO \sin \beta \sin \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{AO}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

点 B の座標は $(BO \cos \beta, -BO \sin \beta)$ であるから $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$ に代入して

$$BO \cos \beta \cos \alpha - BO \sin \beta \sin \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{BO}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

§ 5. ③の証明

OQ は $\angle AOB$ の二等分線であるから $AQ : QB = AO : BO$ である。よって Q は線分 AB を $AO : BO$ の比に内分する。Q の x 座標は $\frac{1}{\cos \alpha}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{BO \cdot AO \cos \beta + AO \cdot BO \cos \beta}{AO + BO} \\ &= \frac{2 AO \cdot BO \cos \beta}{AO + BO} \end{aligned}$$

両辺を $\cos \beta$ で割ると

$$\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{2 AO \cdot BO}{AO + BO}$$

逆数をとって

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{AO + BO}{AO \cdot BO}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{AO} + \frac{1}{BO} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

§ 6. ④の証明

三角形 ARO と三角形 BRO の面積の比は $AR : RB$ に等しいが、この比は RO を底辺としたときの高さの比

$$AO \cos \beta : BO \cos \beta = AO : BO$$

に等しい。つまり R は線分 AB を $AO : BO$ の比に外分している。

R の y 座標は $\frac{1}{\sin \alpha}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} &= \frac{BO \cdot AO \sin \beta - AO \cdot (-BO \sin \beta)}{-AO + BO} \\ &= \frac{2 AO \cdot BO \sin \beta}{BO - AO} \end{aligned}$$

両辺を $\sin \beta$ で割ると

$$\frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 AO \cdot BO}{BO - AO} = -2 \frac{AO \cdot BO}{AO - BO}$$

逆数をとって

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{AO - BO}{AO \cdot BO} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{BO} - \frac{1}{AO} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

(高知県 高知工業高等専門学校)