

点と直線の符号付き距離を用いた三角方程式・不等式の新解法

高知工業高等専門学校
高木和久

1. 点と直線の距離

極座標を用いて

$$\theta = \alpha, \theta = \alpha + \pi \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

と表わされる2つの半直線と、直交座標を用いて

$$ax + by = 0 \quad (b > 0)$$

と表わされる直線が同じものであったとすると

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

が成り立つ。そして、直交座標で (x_0, y_0) 、極座標で (r, θ) と表わされる点Pとこの直線の距離は

$$r \sin |\theta - \alpha|$$

である。(図1参照)

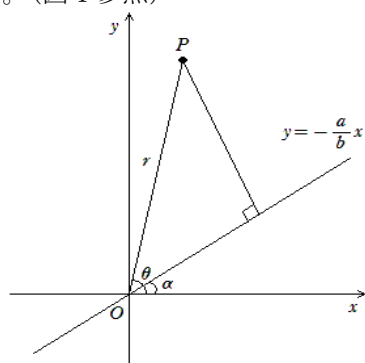


図1 点と直線の距離

点Pが直線より上側にあるときは $\theta > \alpha$ であるから

$$\begin{aligned} r \sin |\theta - \alpha| &= r \sin(\theta - \alpha) \\ &= r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha \\ &= y_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - x_0 \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{ax_0 + by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

点Pが直線より下側にあるときは $\theta < \alpha$ であるから

$$\begin{aligned} r \sin |\theta - \alpha| &= r \sin(\alpha - \theta) \\ &= r \sin \alpha \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta \\ &= x_0 \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - y_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= -\frac{ax_0 + by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

いずれの場合にも点P (x_0, y_0) と直線 $ax + by = 0$ の距離は $\frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ で与えられる。

2. 点と直線の符号付き距離

点P (x_0, y_0) と直線 $\ell: ax + by + c = 0$ ($b \geq 0$)の符号付き距離 $d(P, \ell)$ を次のように定める。

$$d(P, \ell) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点P $(\cos \theta, \sin \theta)$ について

$$d(P, x = 0) = \cos \theta, \quad d(P, y = 0) = \sin \theta$$

が成り立つ。

例1 $\sin \theta > \frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解く

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点P $(\cos \theta, \sin \theta)$ で、

Pが $d(P, y = 0) > \frac{1}{2}$ 即ち $d(P, y = \frac{1}{2}) > 0$ を満たすような θ の値の範囲を求めればよい。

方程式 $\sin \theta > \frac{1}{2}$ の解は $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ である。

3. 方程式 $a \sin \theta + b \cos \theta = c$ の新解法

$a > 0, b \neq 0$ とするとき

$$c = a \sin \theta + b \cos \theta$$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta + b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であるから、 $(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta)$ をPとおくと

$$c = d(P, ay + bx = 0)$$

が成り立つ。これより中心O(0,0)、半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円と直線 $ay + bx = 0$ を用いてこの方程式を図形的に解くことができる。

例2 $\sin \theta + \cos \theta = 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解く

中心が原点で半径が $\sqrt{2}$ の円と直線 $y + x = 0$ を用いる。直線 $y = -x$ の上側にあつて直線 $y = -x$ からの距離が1である直線は $y = -x + \sqrt{2}$ である。

この直線と円 $x^2 + y^2 = 2$ の交点を求めると $(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})$ となるから $\sin \theta + \cos \theta = 1$ の解は $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ である。(図2参照)

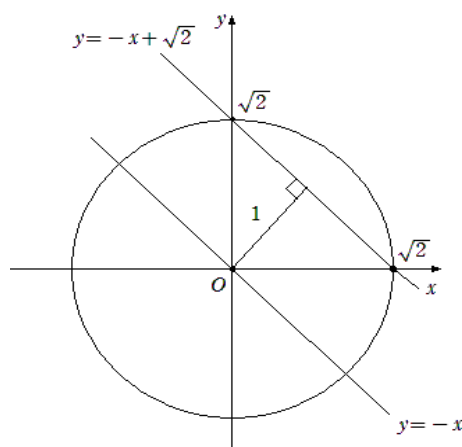


図2 $\sin \theta + \cos \theta = 1$ の幾何的解法

例3 $f(\theta) = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について $f(\theta) = -1$ を満たす θ の値を求めよ。また、 $f(\theta)$ の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ であるから、円 $x^2 + y^2 = 2^2$ と直線 $\sqrt{3}y - x = 0$ を用いる。

まず、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ からの距離が -1 であるような円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上の点を右から P_1, P_2 とすると、これらの点は直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ の下側にある。(図3参照)

点 $(2,0)$ と直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ の距離は 1 であるから、 P_1 の座標は $(2,0)$ である。また、三角形 OP_1P_2 は二等辺三角形であるから

$$\angle OP_2P_1 = \angle OP_1P_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle P_1OP_2 = \frac{2}{3}\pi$$

よって $f(\theta) = -1$ を満たす θ の値は $\theta = 0, \frac{4}{3}\pi$ となる。

また、 $f(\theta)$ が最小値をとるのは点 $P(2\cos \theta, 2\sin \theta)$ が直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ よりも下側にあって、 OP がこの直線と直交するときである。このときの θ の値は $\frac{5}{3}\pi$ であり、 $OP = 2$ であるから $f(\theta)$ の最小値は -2 となる。

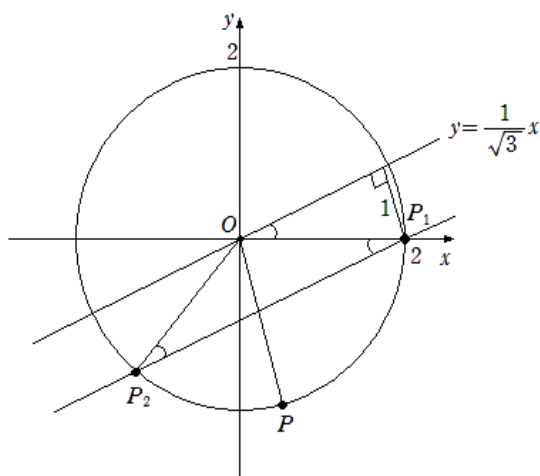


図3 広島工大の入試問題の幾何的解法

4. 原点を通る円を用いた新解法

直線 $y = x \tan \theta$ と円 $x^2 + y^2 = 2x$ との交点を求めてみよう。

$$x^2 + x^2 \tan^2 \theta = 2x$$

$$(1 + \tan^2 \theta) x^2 = 2x$$

$$x^2 = 2x \cos^2 \theta$$

$$\therefore x = 0, 2\cos^2 \theta$$

原点でないほうの交点を P とすると、その y 座標は

$$y = x \tan \theta = 2\cos^2 \theta \cdot \tan \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

である。一方、直線 $y = x \tan \theta$ と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ との交点を Q, R とすると、これらの点の座標は $Q(\cos \theta, \sin \theta), R(-\cos \theta, -\sin \theta)$ である。(図4参照)

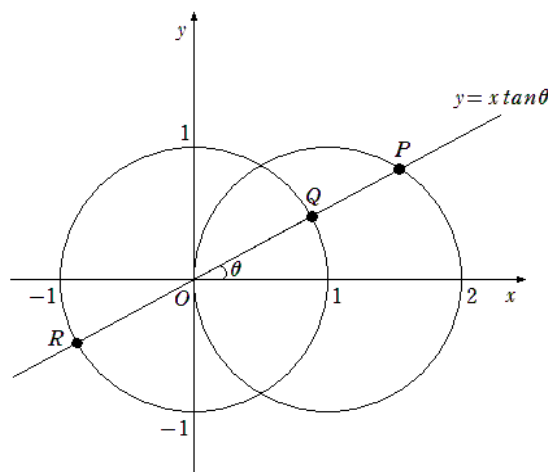


図4 原点を通る円と単位円

例4 $\sin 2\theta = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解く

P と Q の y 座標が等しくなるような角は 4 つある。

図5にこの4組の点 P_n, Q_n を示す。 $P_2 = Q_2, P_4 = Q_4$ は2つの円の交点である。

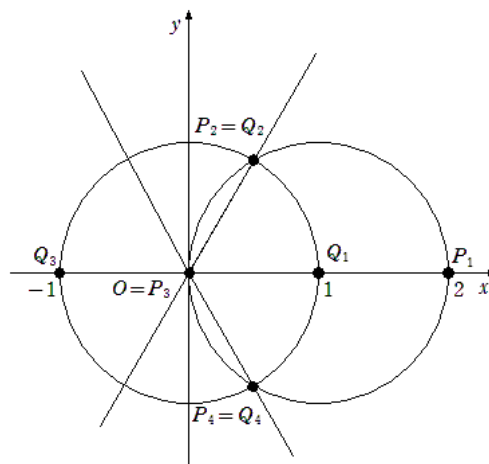


図5 $\sin 2\theta = \sin \theta$ の幾何的解法

ここで

$$OQ_1 = OQ_2 = Q_1Q_2 = 1$$

であるから、三角形 OQ_1Q_2 は正三角形である。

P_n と Q_n の座標を表1に示す。 P_n に対応する角を求めることにより、 $\sin 2\theta = \sin \theta$ の解が $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ であることがわかる。

表1 P_n と Q_n の座標

n	P_n	Q_n
1	$(2,0)$	$(1,0)$
2	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
3	$(0,0)$	$(-1,0)$
4	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

例5 $\sin 2\theta > \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解く

点 P の y 座標が点 Q の y 座標よりも大きくなる θ の値の範囲を求めればよい。よって $\sin 2\theta > \sin \theta$ の解は $0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$ である。