

「逆関数の考え方」

松田 修 (津山高専)

以下に逆関数の重要性について考えていく.

関数 $y = f(x)$ の逆関数は, その定義域を A , 値域を B としたとき, B に含まれる y の値に対して $y = f(x)$ となるような x の値が A の中にただ 1 つ定まるとき定義される. つまり, 上の状況のもとで, x を y の**逆関数**と呼び, $x = f^{-1}(y)$ と書く.

さて, 関数 $y = f(x)$ の定義域 A の中の 2 数 x_1 と x_2 に対して, $x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) \geq f(x_2)$ であるとき, $f(x)$ を**増加関数**, つねに $f(x_1) \leq f(x_2)$ であるとき, $f(x)$ を**減少関数**という. そして増加関数, 減少関数を称して**単調関数**という. 特に, $x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) < f(x_2)$ であるとき, $f(x)$ を**狭義の増加関数**, つねに $f(x_1) \leq f(x_2)$ であるとき, $f(x)$ を**狭義の減少関数**という. 次は, 逆関数に関する基本命題である.

命題 1 関数 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で, 連続な狭義の単調関数とする. このとき, $[f(a), f(b)]$ または $[f(b), f(a)]$ を定義域とする逆関数 $f^{-1}(y)$ が存在し, $f^{-1}(y)$ は連続な狭義の単調関数になる.

微分の観点からみると命題 1 は平均値の定理を用いて, 次の命題に変わる.

命題 2 関数 $f(x)$ は a, b ($a < b$) を含む区間で微分可能で, x を区間 $I = (a, b)$ の任意の点とする. このとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) I で $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は I で狭義の増加関数である.

(2) I で $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は I で狭義の減少関数である.

逆関数の考え方で重要なことは, **代数関数**の積分の逆関数から**超越関数**を見出すところにある.

ここで, $y = f(x)$ が代数関数であるとは,

$$R_0(x) + R_1(x)y + \cdots + R_n(x)y^n = 0$$

となる x の多項式 $R_0(x), R_1(x), \cdots, R_n(x)$ が存在するものをいう. 代数関数でない関数が超越関数である.

例えば, 無理関数は代数関数であり, 三角関数や指数関数, 対数関数は超越関数である. 以下, 具体的に超越関数の構成を概観していこう.

(例 1) 代数関数 $\frac{1}{t}$ を考える. この積分

$$y = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (1)$$

は、区間 $(0, \infty)$ で、狭義の増加関数であり、微分可能である。そして値域は $(-\infty, \infty)$ である。

(1) の逆関数を

$$x = \exp(y) \quad (2)$$

と置けば、これも狭義の増加関数であり、区間 $(-\infty, \infty)$ 微分可能である。そして、 $\exp(0) = 1$, $(\exp(y))' = \exp(y)$ 等が成り立つ。 $x = \exp(y)$ を指数関数という。そして、この逆関数を

$$y = \log x \quad (3)$$

と書き、対数関数というのである。

(例 2) 代数関数 $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ を考える。この積分

$$\theta = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (4)$$

は、区間 $[0, 1]$ で、狭義の増加関数であり、微分可能である。(4) の逆関数を

$$x = \sin \theta \quad (5)$$

と置くと、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるので、 $(\sin \theta)' = \sqrt{1 - (\sin \theta)^2}$ である。そこで、 $\cos \theta = (\sin \theta)'$ と置くと、 $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$ 、さらには、 $(\cos \theta)' = -\sin \theta$ が成り立つ。

(例 3) 代数関数 $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ を考える。この広義積分

$$x = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt \quad (6)$$

は、区間 $[0, 1]$ で、狭義の増加関数であり、微分可能である。(6) の逆関数を

$$u = \text{sl}(x) \quad (7)$$

と記し、**レムニスケートサイン** x と呼ぶ。 $w = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$ と置くと、 $\text{sl}(w) = 1$ であり、また、定義より $\text{sl}(0) = 0$ でもあり、さらに、 $\text{sl}(x)$ の微分は、

$$\text{sl}'(x) = \sqrt{1 - \text{sl}(x)^4} \quad (8)$$

となる。

$$\text{cl}(x) = \sqrt{\frac{1 - \text{sl}(x)^2}{1 + \text{sl}(x)^2}} \quad (9)$$

と置く． $\text{cl}(w) = 0$, $\text{cl}(0) = 1$ である． また,

$$\text{cl}'(x) = -\sqrt{1 - \text{cl}(x)^4} \quad (10)$$

となる． $\text{cl}(x)$ を, **レムニスケートコサイン** x と呼ぶ．

実は, 三角関数もレムニスケート関数も, どちらも複素関数へと拡張される． そして三角関数は周期 2π をもつ． レムニスケート関数も周期をもつが, 2 重周期であることが知られている．

複素関数 $f(z)$ が 2 重周期とは, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}^2$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$ で, 任意の整数 a, b に対して, $f(z + a\omega_1 + b\omega_2) = f(z)$ が成り立つものをいう． 2 重周期をもつ関数は, 楕円関数論で一般的に扱われる．