高専版 **CALCULUS** (微分方程式)

「スロープフィールドとオイラー法」

松田　修（津山高専）

微分方程式の学習において，まず，考えなくてはならないことは，与えられた微分方程式が”何を意味するか”ということである．

1. スロープフィールド

初学者にとって，微分方程式の意味をもっともよく表現できるものが，**スロープフィールド**である．これは微分方程式から得られた各点の解の傾きを図で表したものである．以下，具体的な例で見ていこう．

(例 1) $y' = x$ のスロープフィールドは以下である．

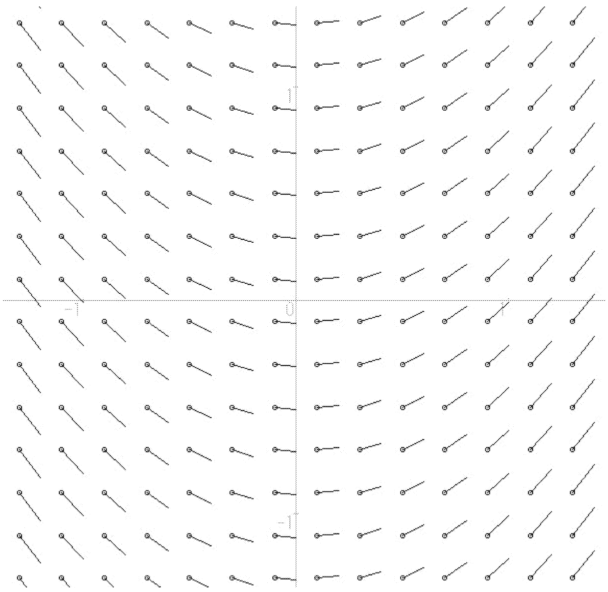

図 1.　$y' = x$ のスロープフィールド

微分方程式 $y' = x$ のスロープフィールドは，点 $x = x_0$ での解曲線の接線の傾き $y'(x_0)$ が x_0 に等しいことを意味している．したがって，第 1 象限と第 4 象限における傾きは常に正であり，第 2 象限と第 3 象限における傾きは常に負となっている．そして，スロープフィールドの傾きに沿って曲線を描いたものが，**解曲線**となる．実際に，微分方程式 $y' = x$ の解は $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (C は任意定数) であり，それが描く曲線は，図 1 のようにコンピュータで細かく描いたスロープフィールドのスケッチから大まかに見えている．

(例 2) $y' = -\dfrac{x}{y}$ のスロープフィールドを見ていこう．

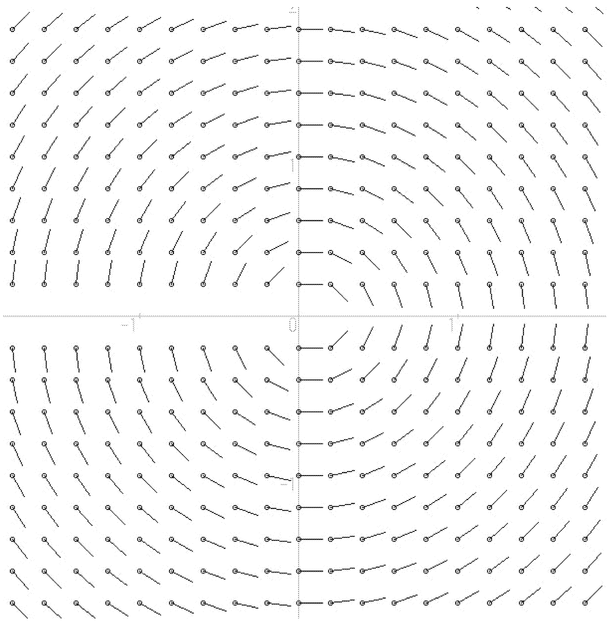

図 2.　$y' = -\dfrac{x}{y}$ のスロープフィールド

$y \neq 0$ であることに注意して，微分方程式 $y' = -\dfrac{x}{y}$ のスロープフィールドを考える．これは，第 1 象限と第 4 象限における傾きは常に負であり，第 2 象限と第 3 象限における傾きは常に正となる．図 2 のコンピュータで描いたスロープフィールドのスケッチを見ればわかるように，解曲線は円となることが想像できる．実際に，$x^2 + y^2 = C$ (C は任意定数) を x で微分すれば，$2x + 2y\dfrac{dy}{dx}$ から，$y' = -\dfrac{x}{y}$ が得られる．

1. オイラー法

微分方程式の解曲線の中で，点 $(x_0,\ y_0)$ を通る解曲線を考えると，数ある解の式の中から 1 つだけ解を抽出したことになる．この抽出された解を初期値 $(x_0,\ y_0)$ から得られる**特殊解**という．

ここで，紹介する**オイラー法**とは，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (\text{初期条件 } x = x_0,\ y = y_0) \tag{1}$$

の特殊解を数値的に近似していく最も初歩的な方法である．

オイラー法では，微分方程式 (1) を，点 $(x_n,\ y_n)$ において，

$$dy_n = f(x_n, y_n)dx \tag{2}$$

と考え，dx を x の微小増分とし，点 (x_0, y_0) での y の微小増分 dy_0 を (2) で計算し，

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + dx \\ y_1 &= y_0 + dy_0 \end{aligned}$$

を計算する．同様に，得られた点 (x_1, y_1) から y の微小増分 dy_1 を (2) で計算し，

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + dx \\
y_2 &= y_1 + dy_1
\end{aligned}
$$

を計算する．この操作を繰り返して微分方程式の近似解（解曲線）を求めていく方法である．

(例 3) 微分方程式

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad (\text{初期条件 } x = -1,\ y = 0.1)$$

をオイラー法を用いて解いてみよう．

[解] $dx = 0.005$ とし，数値近似解を求めてみる．

(1) $(x_1,\ y_1)$ を求める．$dy_0 = 10 \times 0.005 = 0.05$，$x_1 = -1 + 0.005 = -0.995$，$y_1 = 0.1 + 0.05 = 0.15$

(2) $(x_2,\ y_2)$ を求める．$dy_0 = 0.033$，$x_1 = -0.995 + 0.005 = -0.990$，$y_1 = 0.15 + 0.033 = 0.183$

同様な計算で，以下の表を得る．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	-1	-0.995	-0.990	-0.985	-0.980	-0.975	-0.970	-0.965	-0.960	-0.955
y_n	0.1	0.150	0.183	0.210	0.234	0.255	0.274	0.291	0.308	0.324

次の図 3 はオイラー法で求めた近似解曲線である．微分方程式が $y = 0$ で定義されないことから $y_n < 0$ となったとき，数値計算が終了することを注意せよ．

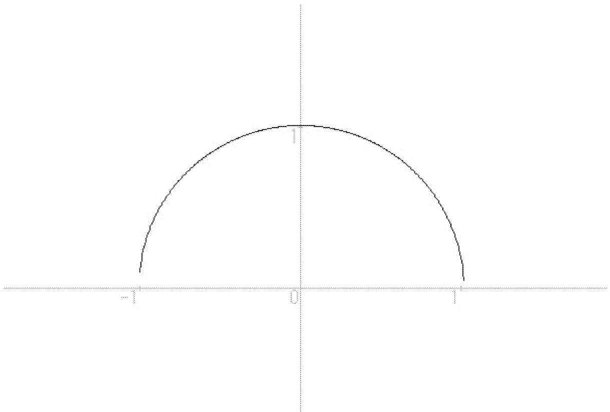

図 3.　$y' = -\dfrac{x}{y}$　(初期条件 $x = -1,\ y = 0.1$) の近似解曲線

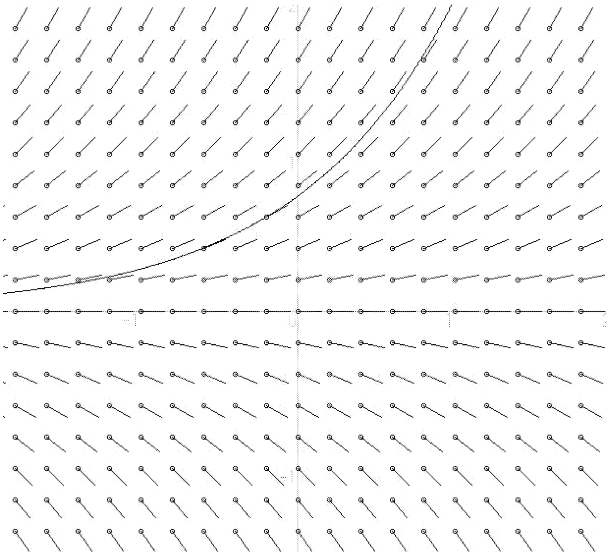

図 4.　$y' = y$ のスロープフィールドと，

初期条件 $(x = -2,\ y = 0.1)$ の近似解曲線

$f(x, y)$ がどんなに複雑な関数であってもコンピュータを使えば，簡単にスロープフィールドと近似解曲線を得ることができ，与えられた微分方程式の直観的な意味を視覚的に理解できる．

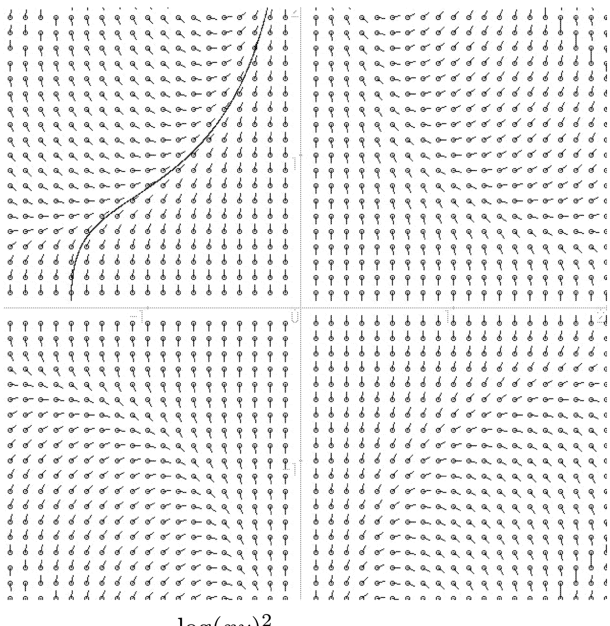

図 5.　$y' = \dfrac{\log(xy)^2}{\sin xy}$ のスロープフィールドと，

初期条件 $(x = -1.5,\ y = 0.05)$ の近似解曲線