8　応用

$x,\ y,\ z$ は t の関数とする．次の連立微分方程式を解こう．

$$\begin{cases} x' &= -8x-4y+3z \\ y' &= 6x+4y-2z \\ z' &= -21x-9y+8z \end{cases}$$

これは，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -21 & -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書くことができる．

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -21 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

とおくと，A の固有多項式は $\gamma_A(t) = (t-1)^2(t-2)$ であり，$t=1$ の固有空間の次元は $\mathrm{dim}V(1)=1$ である．したがって，$t=1$ に関するジョルダン細胞は 1 個であり，A のジョルダン標準形は，

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ とおいて，$(A-E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ すなわち，

$$\begin{pmatrix} -9 & -4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -21 & -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $\mathbf{p}_1$ をの解の 1 つを求めると，$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を得る．

次に $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ とおく．$(A-E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ すなわち，

$$\begin{pmatrix} -9 & -4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -21 & -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より $\mathbf{p}_2$ をの解の 1 つを求めると，$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を得る．

最後に，$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ とおく．$(A-2E)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$ すなわち，

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ -21 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $\mathbf{p}_3$ をの解の 1 つを求めると，$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る．

以上のことから

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，$P^{-1}AP = J$ となる．

さて，$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

したがって，$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ を得る．

したがって，$x_1' = x_1 + y_1$, $y_1' = y_1$, $z_1' = z_1$ より，

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t,\ y_1 = c_2 e^t,\ z_1 = c_3 e^{2t}$$

$(c_1, c_2, c_3$ は任意定数$)$ である．

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$，すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{cases} x &= c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t} \\ y &= 2c_2 e^t - c_3 e^{2t} \\ z &= 3(c_1 + c_2)e^t + 3tc_2 e^t + 2c_3 e^{2t} \end{cases}$$

が解である．

問 4　x, y, z は t の関数とする．次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x' &= -32x - 55y + 85z \\ y' &= 6x + 12y - 15z \\ z' &= -10x - 16y + 27z \end{cases}$$