6.1 例

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする．A のジョルダン標準形を求めてみよう．

まず，$|A - tE| = (t-2)^4$ であり，最小多項式は，$\varphi_A(t) = (t-2)^2$ であることがわかる．また，$\mathrm{rank}(A - 2E) = 1$ より，$\dim V(2) = 3$ である．これより，ジョルダン細胞の最大次数は 2 であり，ジョルダン細胞の個数は 3 個である．したがって，A のジョルダン標準形 J は，

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であることがわかる．

$\dim V(\alpha) = 3$ なので $(M - 2E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{p}_1$ は 2 次元分存在するので，互いに独立な代表的なもの　$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_1''$ がとれる．

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，$y = 0$ が得られ，$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{p}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{p}_1'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と代表的な 3 つの独立なベクトルを得る．

次に

$$(A - 2E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$$

をみたす縦ベクトル $\mathbf{p}_2$ を求めると，$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を代表的に選べる．$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_1'\ \mathbf{p}_1'')$ ，すなわち，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と変形される．

問 3　$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよ．