6.2　例２

$M=\begin{pmatrix}-2 & -6 & -10\\ 6 & 11 & 15\\ -2 & -3 & -3\end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよう。

まず，固有方程式は　$\gamma(t)=(t-2)^3$ である。

$\dim V(2)=2$ なので，ジョルダン細胞の個数は２。

最小多項式は，$\varphi_M(t)=\left(t-2\right)^2$ となるので，最大ジョルダン細胞の次数は２。

$\left(M-2E\right)\mathbf{p}=\mathbf{0}$ を求めると，$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}-3s-5t\\ 2s\\ 2t\end{pmatrix}$ となる。

$\left(M-2E\right)\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1$ が解を持つためには，方程式の形から，

$-3s-5t=4t$ を，みたすことが必要十分である。すなわち，$t:s=1:-3$ である。

そこで，$t=1/2, s=-3/2$ とすると，$\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$ となり，$\mathbf{p}_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ とできる。

また，$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}-3s-5t\\ 2s\\ 2t\end{pmatrix}$ で，$s=\dfrac{5}{2}$，$t=-\dfrac{3}{2}$ とすれば，$\mathbf{p}'=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ -3\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$ とおくと，これは正則で，$P^{-1}MP=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ となる。

Maxima を使うときの注意！

$M = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 6 & 11 & 15 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ として，

固有ベクトルを計算させるために，

Eigenvectors(M);

とすると，

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

と，表示される。

ところが，

$M - 2E = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -10 \\ 6 & 9 & 15 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ で 1 行目の 2 倍が 3 行目に等しいことを考えると，

$\mathbf{p}_2$（あるいは，$\mathbf{p}_2{}'$）を求めることはできない。

そこで，やはり，固有ベクトルを，

solve([-4*x-6*y-10*z=0,6*x+9*y+15*z=0],[x,y,z]);

として求めると，

$$x = -\frac{3s+5t}{2}, \quad y = s, \quad z = t$$

を得る。1 行目が 3 行目の 2 倍になることを考えると，$s = -3, \quad t = 1$ として，

$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。

よって，$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ とおけば，これは正則で，$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。