6　行列のジョルダン標準形への変形２

今度は 4 次の行列 M は,

$\varphi_M(t) = (t-\alpha)^2$ で $\mathrm{dim}V(\alpha) = 2$ としよう.

$\Downarrow$

このことから，M のジョルダン標準形は,

ジョルダン細胞が 2 個で，最大ジョルダン細胞の大きさは 2 次，すなわち

$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ であることがわかる.

$\Downarrow$

したがって，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}MP = J$ となるはずである.

$\Downarrow$

P を求めよう!!

ステップ 1．

今度は $\dim V(\alpha) = 2$ なので $(M - \alpha E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{p}_1$ は 2 次元分存在するので，互いに独立な代表的なもの　$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_1'$ がとれる．次に

$$\begin{cases} (M - \alpha E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ \\ (M - \alpha E)\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1' \end{cases}$$

をみたす縦ベクトル $\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_2'$ を求める．

命題　この 4 つの縦ベクトル $\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_1'$，$\mathbf{p}_2'$ はそれぞれ 1 次独立である．

(証明してみよう.)

この命題から行列 $P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_1'\ \mathbf{p}_2')$ は正則行列であることがわかる．さらに，

$$\begin{aligned} (M - \alpha E)P &= ((M - \alpha E)\mathbf{p}_1\ (M - \alpha E)\mathbf{p}_2\ (M - \alpha E)\mathbf{p}_1'\ (M - \alpha E)\mathbf{p}_2') \\ &= (\mathbf{0}\ \mathbf{p}_1\ \mathbf{0}\ \mathbf{p}_1') \\ &= (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_1'\ \mathbf{p}_2') \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって，

$$MP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha EP = P \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

すなわち，$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ を得る．

結論は，ステップ 1 の最初の所で求めた，$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}'_1$ $\mathbf{p}'_2$ を

使ってつくった行列 P を使えば，$P^{-1}MP$ はみごとに

ジョルダン標準形 $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ になるということである.

問 2 *(1)*　4 次の行列 M は, $\varphi_M(t) = (t-\alpha)^3$ で $\dim V(\alpha) = 2$ とする．M のジョルダン標準形を構成せよ.

(2)　4 次の行列 M は, $\varphi_M(t) = (t-\alpha)^2$ で $\dim V(\alpha) = 3$ とする．M のジョルダン標準形を構成せよ.