5　行列のジョルダン標準形への変形 1

実は最後に述べた予想は正しい．では実際にどのようにして，ジョルダン標準形へ変形していくのかを見ていこう．

まず 4 次の行列 M は，

$\varphi_M(t) = (t-\alpha)^4$ で $\dim V(\alpha) = 1$ としよう．

$\Downarrow$

このことから，M のジョルダン標準形は，

ジョルダン細胞が 1 個の

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$ であることがわかる．

$\Downarrow$

したがって，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}MP = J$ となるはずである．

$\Downarrow$

P を求めよう!!

ステップ 1．

$$\begin{cases} (M-\alpha E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (M-\alpha E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \\ (M-\alpha E)\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \\ (M-\alpha E)\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 \end{cases}$$

をみたす縦ベクトル $\mathbf{p}_i$ $(i=1,2,3,4)$ を求める．$\mathbf{p}_1$ は $\mathrm{dim}V(\alpha)=1$ なので 1 次元分存在する．実は

命題　この 4 つの縦ベクトル $\mathbf{p}_i$ $(i=1,2,3,4)$ はそれぞれ 1 次独立である．

すなわち，$\mathbf{p}_4, (M-\alpha E)\mathbf{p}_4, (M-\alpha E)^2\mathbf{p}_4, (M-\alpha E)^3\mathbf{p}_4$ は 1 次独立である．

証明しよう．

$$c_1\mathbf{p}_4 + c_2(M-\alpha E)\mathbf{p}_4 + c_3(M-\alpha E)^2\mathbf{p}_4 + c_4(M-\alpha E)^3\mathbf{p}_4 = 0$$

とおいたとき，$c_1=c_2=c_3=c_4=0$ 以外に解がないことを示せばよい．仮に，$c_1 \neq 0$ としよう．上の式に左から $(M-\alpha E)^3$ をかけると，$(M-\alpha E)^4\mathbf{p}_4 = (M-\alpha E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ なので，$c_1(M-\alpha E)^3\mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ を得る．しかしこのようなことはありえない．よって，$c_1=0$ である．次に $c_2 \neq 0$ と仮定すると，今度は上の式に左から $(M-\alpha E)^2$ をかけると，$c_2(M-\alpha E)^3\mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ を得る．これも矛盾である．よって，$c_2=0$ である．この議論を c_3 についても c_4 についても行うことで，$c_1=c_2=c_3=c_4=0$ を得る．　(証明終)

ステップ 2．

この命題から行列 $P=(\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3\ \mathbf{p}_4)$ は正則行列であることがわかる．さらに，

$$(M-\alpha E)P \;=\; ((M-\alpha E)\mathbf{p}_1\ (M-\alpha E)\mathbf{p}_2\ (M-\alpha E)\mathbf{p}_3\ (M-\alpha E)\mathbf{p}_4)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathbf{0}\ \mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3) \\
&= (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3\ \mathbf{p}_4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
MP = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha EP = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.
$$

すなわち，$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ を得る．

結論は，ステップ 1 の最初の所で求めた，$\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$ を使ってつくった行列 P を使えば，$P^{-1}MP$ はみごとにジョルダン標準形 $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ になるということである．