4 ジョルダン標準形の構造を決めるもの

結論からいうと，ジョルダン標準形の構造を決めるものは，

(1) 最小多項式の次数

(2) 固有空間の次元

である．(固有空間：行列 A の固有値の 1 つを α としたとき，A が定義する線形写像を f としたとき，$\mathrm{Ker}(f-\alpha I)$ を α の固有空間といい，$V(\alpha)$ と書く．実際に固有空間の次元をどのように計算すればよいかというと，まず $A-\alpha E$ のランクを計算して，次元定理を使って計算する．すなわち，n から $\mathrm{rank}(A-\alpha E)$ を引けばよい．

このことを 4 次のジョルダン標準形で見てみよう．

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&1&0&0\\0&\alpha&1&0\\0&0&\alpha&1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha&1&0&0\\0&\alpha&1&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\alpha&1&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\alpha&1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\alpha&1&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}.$$

上の 5 つのジョルダン標準形の固有値はどれも α だけである．それぞれの最小多項式と固有空間の次元を計算したものが以下である．

$$\varphi_A(t)=(t-\alpha)^4,\quad \mathrm{rank}(A-\alpha E)=3,\quad \mathrm{dim}V(\alpha)=4-3=1.$$

$$\varphi_B(t)=(t-\alpha)^3,\quad \mathrm{rank}(A-\alpha E)=2,\quad \mathrm{dim}V(\alpha)=4-2=2.$$

$$\varphi_C(t)=(t-\alpha)^2,\quad \mathrm{rank}(A-\alpha E)=2,\quad \mathrm{dim}V(\alpha)=4-2=2.$$

$$\varphi_D(t)=(t-\alpha)^2,\quad \mathrm{rank}(A-\alpha E)=1,\quad \mathrm{dim}V(\alpha)=4-1=3.$$

$$\varphi_E(t)=(t-\alpha),\quad \mathrm{rank}(A-\alpha E)=0,\quad \mathrm{dim}V(\alpha)=4-0=4.$$

この表をみて何かを感じとって欲しい．

この表から予想されることは次のことである．

1. 最小多項式は含まれるジョルダン細胞の中の最大次数である．
2. 固有空間の次元はジョルダン細胞の個数である．

ところで，J を上のジョルダン標準形のどれかとし，P をある正則行列をする．そして PJP^{-1} という行列を考える．

$$(PJP^{-1})^2 = PJ^2P^{-1},\ \cdots,\ (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1},\ \cdots$$

であるし，

$$\mathrm{rank}(A - \alpha E) = \mathrm{rank}(PAP^{-1} - \alpha E)$$

なので，PJP^{-1} の最小多項式の次数と，固有空間の次元はジョルダン標準形 J のそれらと同じである．このことは何を意味するのだろうか？

想像されることは，

4 次の行列 M の固有値が α のみの場合，

ある行列 P^{-1} が存在して，

$P^{-1}MP$ が上のジョルダン標準形のどれかに変形されるのではないだろうか，

そして，M の最小多項式はジョルダン標準形の最大ジョルダン細胞の大きさを決め，

固有空間の次元はジョルダン細胞の個数を決める．

ということである．