3　ハミルトン−ケーリーの定理と最小多項式

先ず，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という行列を考えよう．この行列は，$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，$A^2 - 2A + E = 0$ (E は単位行列) が成り立つ．これは，多項式 $t^2 - 2t + 1$ の変数 t に行列 A を代入すると零行列になることを意味する．そこで

> ある n 次行列 A が与えられたとき，
> A を代入して零行列になるような多項式 $\varphi(t)$ は
> いつでも存在するのだろうか？という疑問が生ずる．

この疑問に答えてくれるものが**ハミルトン−ケーリーの定理**である．

> **ハミルトン−ケーリーの定理**.　n 次行列 A の固有多項式を $\gamma(t)$ とすると，$\gamma(A) = 0$ が成り立つ．

証明は，代数学の基本定理と，A はある正則行列 P を用いると必ず $P^{-1}AP$ を上三角行列にすることができるという事実を用いる．

ハミルトン−ケーリーの定理から任意の n 次行列 A に対し，$\varphi(A) = 0$ となる多項式 φ が存在することがわかった．しかし，零にする多項式は固有多項式に限らず他にもいろいろあるはずである．そこで，$\varphi(A) = 0$ となる多項式の中で，次数が最低で最高次数の係数が 1 となるものを A の**最小多項式**とよんで，$\varphi_A(t)$ と書く．実はこの最小多項式がジョルダン標準形の構造に大きく関わっているのだ．