2　ジョルダン標準形，ジョルダン細胞

前のセクションでは，特に２次形式を与える行列の対角化について復習した．一般の行列の対角化については，次のことが知られている．

> n 行 n 列の行列 A が相異なる n 個の固有値を持つ場合
>
> A はある正則行列 P により対角化される．
>
> すなわち $P^{-1}AP$ は対角行列である．

A の固有方程式が重根をもつ場合はどうであろうか？ この場合一般には対角化されない．そこで登場するのが**ジョルダン標準形**である．ジョルダン標準形について話す前に，まずジョルダン細胞について述べる．

2.1　ジョルダン細胞

固有値を a とする．k 次の固有値 a に対する**ジョルダン細胞** $J(a,k)$ は次のように定義される．

$$J(a,1)=(a),\quad J(a,2)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad J(a,3)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$J(a,4)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2.2　ジョルダン標準形

次にジョルダン細胞の**直和** $J(a,k) \oplus J(b,l)$ を考える．すなわち

$$J(a,1) \oplus J(b,1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad J(a,1) \oplus J(b,2) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$J(a,2) \oplus J(b,2) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

上のような行列は対角行列の次に簡単な行列である．このように，ジョルダン細胞の直和で書けている行列のことを**ジョルダン標準形**とよんでいる．特に対角行列は，1 次のジョルダン細胞の直和だけで書けている．これがジョルダン標準形という立場からみた対角行列の正体である．

$$J(a,1) \oplus J(b,1) \oplus J(c,1) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

それでは，ある行列 A のジョルダン標準形を知りたい場合，**その標準形にはどんなジョルダン細胞が含まれており，また何個のジョルダン細胞から構成されているのであろうか．**