行列のジョルダン標準形

1　行列の対角化

行列の対角化というものを高専では２年生で習う．最初にこのことを復習しよう．

　行列の対角化がどういうときに効果があるかという問題はなかなか難しいと思うが，最もよく例に出される２次曲線の話から始めよう．

1.1　２次曲線

２次曲線とは, 2 次多項式 $f(x, y) = 0$ の零点の集合のことをいう.

例　(1) $x^2 + y^2 = 1$ は半径 1 の円である.

(2) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ は長軸の長さが 6 短軸の長さが 4 の楕円を表す.

(3) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ は主軸の長さ 6 の双曲線を表す.

(4) $y = x^2$ は放物線を表す.

(5) $y^2 - x^2 = 0$ は $y = x$ と $y = -x$ の 2 直線を表す.

　上の (1) から (5) の例は式からすぐにその曲線の形がわかるいわゆる標準形といわれる式である．それでは,

問　$x^2 + 4xy + y^2 = 3$ という式を持つ曲線は一体どんな２次曲線なのであろうか？

上で述べた５つの形の中のどれかになっていればすぐわかる．

$\Downarrow$

しかし一見して上の形のどれとも同じにはならない．

$\Downarrow$

つまり普通の座標で見ているからわからないのである．

$\Downarrow$

斜めから見たらわかるのではないだろうか．

$\Downarrow$

違った位置に視点を移して見る．これこそが行列の対角化であった．

1.2　固有値，固有ベクトル

具体的にどのように調べていくかを見ていこう．まず $x^2 + 4xy + y^2 = 3$ は，

$$(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$$

と書くことができる．中にある２行２列の行列を A としよう．つまり

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．A を対角化する．そのためには固有値をもとめればよかった．

固有値を求めよう!!

固有多項式 $\gamma(t)=0$ を考えよう!!

$$\gamma(t)=\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}=0$$

より，$(t+1)(t-3)=0$ を得る．

したがって，行列 A の固有値は $t=3,\ -1$ である．

このことと，また

行列 A が対称行列であることから， A はある直交行列 P により対角化されるのである．

すなわち

$$ {}^tPAP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と変形される．

直交行列は $P^tP={}^tPP=E$ という性質があるので，

$$(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3.$$

これは

$$(x\ y)P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3.$$

もう少し変形すると，

$${}^t({}^tP\mathbf{x})\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}({}^tP\mathbf{x})=3.$$

ここで，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした．

最後の式は何を意味するのかといえば，${}^tP\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ とおいて，この新しい座標 $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を使うと，今議論している曲線は，

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3.$$

すなわち，$3x'^2 - y'^2 = 3$. もっと詳しく書けば，

$$x'^2 - \frac{y'^2}{3} = 1.$$

つまりこの曲線は双曲線であるということがわかる !!

直交行列（変換）によって新しい座標を定義する!!
直交変換により写された図形はその形を変えないという
優れものの変換だったということを思い出して欲しい!!

具体的に P はどんな行列であろうか気になるところである．計算してみよう !!

$t = 3$ の固有ベクトルを，$p_1 = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

より，$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る．すなわち $p_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．同様に，$t = -1$ の固有ベクトルを，$p_2 = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

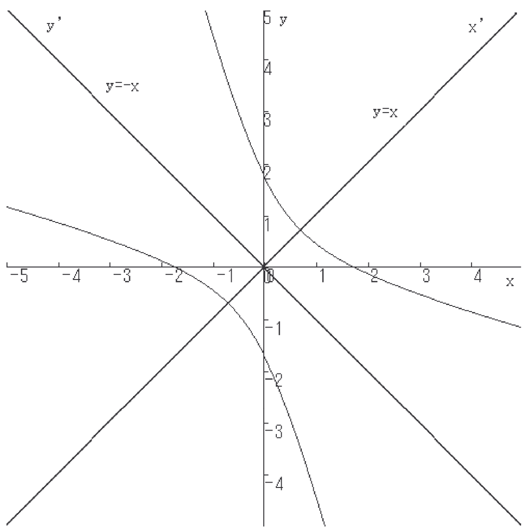
より，$p_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．したがって，

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．${}^tP\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ だったので，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立ち，$x' = 0$ すなわち y' 軸は $y = -x$ であり，$y' = 0$ すなわち x' 軸は $y = x$ であることがわかる．以上のことを考えてこの双曲線を図示すると次のようになる．



問 1　次のグラフの概形を描け．

$13x^2 - 10xy + 13y^2 = 72$